Commission de réflexion

sur l'enseignement des mathématiques

Rapport d'étape sur la géométrie

et son enseignement

0. Introduction.

L'objectif de ce texte est de tenter de répondre aux questions suivantes :

• Comment se situe la géométrie "élémentaire" ([1]) comme partie des mathématiques en cette fin de vingtième siècle ?

• Faut-il encore enseigner la géométrie aujourd'hui au collège et au lycée ?

• Comment analyser l'évolution de l'enseignement de la géométrie, au collège et au lycée, dans les dernières décennies (disons depuis 1960) et quel est l'état des lieux actuellement ?

• Quelles propositions peut-on avancer en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie, demain ?
Cette dernière question se subdivise en plusieurs thèmes : quoi enseigner en géométrie ? comment enseigner la géométrie ? quelles relations établir entre la géométrie et les autres parties des mathématiques ? entre la géométrie et les autres disciplines ? quelle formation des maîtres pour enseigner la géométrie ?

Notre réponse à la première question fait l'objet de l'annexe 1 de ce texte. Il s'agit, pour l'essentiel, d'une réponse mathématique que le lecteur non spécialiste pourra omettre dans un premier temps, encore que les idées qui y sont avancées influencent notablement l'ensemble de notre propos. La vision de la géométrie présentée dans cette annexe est fondamentalement celle du programme d'Erlangen de Felix Klein (une géométrie correspond pour l'essentiel à l'action d'un groupe de transformations), mais avec un accent particulier mis sur la théorie des invariants.

([1]) Dans ce texte, on appelle élémentaire une géométrie qui a été enseignée, à un moment ou à un autre, dans l'enseignement secondaire français (voire en classes préparatoires). Cela comprend bien sûr la géométrie euclidienne en dimensions 2 et 3, mais pas seulement (penser à la notion d'inversion qui relève de la géométrie anallagmatique, à la division harmonique qui est une notion projective, etc.).

Ce point de vue, complété par celui de mathématiciens des 18ème et 19ème siècles, (Buffon, Crofton, Monge, etc.) voire celui d'artistes et d'architectes, a servi de base à la réflexion des auteurs de ce rapport.

À la question : faut-il encore enseigner la géométrie, la commission a répondu, sans hésitation, de manière positive. Les arguments en faveur de l'enseignement de la géométrie sont nombreux et on peut les répartir en deux volets.
Le premier concerne la formation du citoyen. Il s'agit, d'abord, de l'importance de la vision dans l'espace. Dans notre société tout entière tournée vers l'image c'est un point assez évident. Il s'agit, ensuite, de l'apprentissage du raisonnement que permet la géométrie, plus tôt et sans doute mieux que toute autre discipline. Il s'agit, enfin, de l'importance de la géométrie dans la vie courante et de sa fonction dans les domaines culturel et esthétique.
Le second volet concerne la formation des scientifiques (techniciens, ingénieurs, chercheurs, professeurs). Nous montrons combien la géométrie est omniprésente dans les sciences et les techniques et combien le fait de penser géométriquement est essentiel pour tous les scientifiques.

En ce qui concerne l'état de l'enseignement de la géométrie, la commission a tenu à faire référence au débat qui, dans les années 1950-70, a précédé l'introduction des "mathématiques modernes" dans l'enseignement, notamment au sein de la commission Lichnérowicz.
En effet, il est clair, *a posteriori*, que ce débat a été insuffisant sur plusieurs points et que cette réforme s'est traduite par un cuisant échec dont les mathématiques n'ont pas fini de payer les conséquences. Ce n'est pas le lieu ici de procéder à une analyse approfondie des causes de l'échec de cette réforme, mais il semble évident que la communauté mathématique, dans son ensemble, a surestimé ses connaissances sur les conditions de la diffusion des mathématiques et sous-estimé les problèmes culturels, épistémologiques et didactiques que son projet soulevait. Aujourd'hui encore, les quelques connaissances qu'a apportées la recherche en didactique des mathématiques sur ce type de phénomènes sont encore trop limitées et insuffisamment connues.

En ce qui concerne plus proprement la géométrie, une analyse assez grossière permet de répartir les raisons de l'échec de la réforme des mathématiques modernes en trois catégories :
• La première raison tient à l'impréparation du corps enseignant, malgré toute la bonne volonté dont il a fait preuve. Peut-être même ce facteur est-il suffisant pour expliquer l'échec de la réforme.

• Il y a ensuite des raisons psychologiques, didactiques et pédagogiques.
D'abord, on a sans doute sous-estimé à l'époque le rôle joué par l'étude des figures dans la construction de l'espace.
Ensuite, l'introduction de l'algèbre linéaire au lycée, qui était une des pierres angulaires de la réforme, s'est heurtée à des difficultés didactiques profondes que les auteurs de la réforme n'avaient pas prévues.

• Il y a enfin des raisons mathématiques et épistémologiques, au moins en ce qui concerne la géométrie. En effet, cette réforme, s'appuyant sur une lecture trop superficielle du programme d'Erlangen, a évacué une partie importante du contenu

de la géométrie, l'appauvrissant ainsi de manière essentielle. Enfin, la minoration du rôle des invariants, l'abandon des cas d'égalité des triangles sont autant de points discutables, tant sur le plan mathématique que sur le plan didactique.

Instruite, au moins partiellement, par cette expérience négative, la commission a souhaité conjuguer l'audace intellectuelle dans la conception des possibilités d'enseignement des mathématiques avec la prudence nécessaire à la manipulation d'un système aussi complexe et aussi essentiel que le système éducatif. Elle a notamment veillé, au chapitre des propositions, à conserver en mémoire les trois points évoqués ci-dessus : cohérence mathématique et épistémologique, contraintes didactiques, formation des maîtres, avant de proposer des modifications substantielles de notre enseignement de la géométrie.

Par ailleurs, la commission n'étant pas chargée d'établir des programmes précis, elle s'est efforcée de proposer des perspectives générales, de suggérer des inflexions par rapport à l'état actuel et d'indiquer des thèmes de réflexion ; en un mot, plutôt que de préparer de nouveaux programmes, elle a tenté de promouvoir un nouvel état d'esprit.

Au niveau des contenus, nos propositions reprennent certains des thèmes évoqués ci-dessus : renforcement de la géométrie dans l'espace, utilisation accrue des invariants élémentaires (longueur, angle, aire), réhabilitation des cas d'isométrie des triangles, introduction en terminale d'une géométrie "riche".

En ce qui concerne les modes d'enseignement, l'accent est mis sur le fait de "penser géométriquement", sur l'apprentissage du raisonnement, sur l'utilisation des nouvelles technologies, ainsi que sur le lien avec les autres disciplines.

La formation des maîtres, enfin, à laquelle la commission attache une grande importance, fait l'objet d'un paragraphe spécifique. Nos propositions visent à conforter la place de la géométrie, à la fois dans les cursus universitaires et dans la formation (initiale et continue) des enseignants.

1. Pourquoi enseigner la géométrie aujourd'hui.

Dans cette partie, nous tentons d'analyser les raisons de continuer – ou non – à enseigner la géométrie élémentaire au collège et au lycée. Les premiers paragraphes, qui concernent notamment la vision dans l'espace et l'apprentissage du raisonnement, valent pour tous les citoyens. Nous envisageons ensuite l'apport de la géométrie dans les disciplines scientifiques, pour la formation des techniciens, des ingénieurs, des chercheurs et des professeurs.

a) La vision dans l'espace([2]).

Si l'on interroge des non mathématiciens, c'est souvent le point que chacun s'accorde à mettre en avant en premier : la géométrie est le lieu où l'on apprend à appréhender l'espace. De fait c'est la géométrie **dans l'espace** qui est le plus souvent citée. Les arguments sont variables selon les professions : pour un médecin la vision géométrique se manifeste dans les interventions sous moniteur en arthroscopie ou en micro-chirurgie, pour un navigateur c'est le tracé sur le globe des géodésiques et des loxodromies, voire les profils des coques des bateaux, pour un ingénieur la perception des mouvements d'un solide, etc.
Il nous semble donc que, parmi les missions sociales qui incombent à l'enseignement des mathématiques, celle de donner à tout citoyen le moyen d'avoir une perception efficace de l'espace qui l'entoure soit l'une des priorités.

Le processus de construction de l'espace a été très étudié par les psychologues et notamment par Piaget. On sait que cette construction prend d'abord appui sur l'activité du corps : les gestes, les mouvements, les déplacements permettent une première prise de possession de l'espace. ([3])
À ce sujet, il est essentiel de noter que la connaissance de l'espace n'est pas réductible à la géométrie. Dans la pratique, il s'y ajoute des notions d'échelle : on ne perçoit pas les objets posés sur une table avec les mêmes concepts que la pièce dans laquelle on évolue, la ville dans laquelle on se déplace, ou l'espace des satellites, des planètes et des étoiles.
Cette remarque vaut notamment pour l'enseignement élémentaire où il est important de bien faire la distinction entre la connaissance familière de l'espace, qui est indispensable à tous, et un vocabulaire géométrique dont l'introduction trop précoce et trop formelle n'est pas toujours utile. Nous reviendrons plus en détail sur ce problème de l'enseignement élémentaire au §3.a).
Parmi les thèmes qui relèvent de cette connaissance de l'espace et dont l'importance pratique est indéniable, on peut citer les suivants : comment se diriger, se déplacer dans une grande ville inconnue, dans la campagne, dans les bois ou en mer ? Comment utiliser et produire un plan pour déterminer une position et prévoir un trajet ? Comment prévoir ses déplacements dans un grand bâtiment inconnu ? Comment représenter ses propres mouvements, ses déplacements par rapport aux

([2]) En fait, le mot "vision dans l'espace", s'il est commode, n'est pas parfaitement adapté et peut se révéler dangereux à l'usage. On l'entendra, dans ce texte, au sens de "connaissance familière de l'espace".

([3]) Dans cet ordre d'idées, le langage des sourds-muets est une belle illustration d'une compréhension intuitive d'un espace plus complexe, celui des positions d'un solide (la main), qui est un espace (non affine) de dimension 6, cf. [BL].

objets environnants ? Comment représenter ce que nous voyons autour de nous ? par un schéma (pour un accident), un plan, une vue en perspective ? Comment décrire les solides élémentaires, leurs mouvements, les directions de l'espace, les distances entre les objets ? Comment décrire les figures planes ?
Ces thèmes nous semblent pouvoir constituer la trame d'un enseignement spécifique de l'espace à l'école élémentaire, cf. §3.a).

Au-delà de cette connaissance familière s'inscrit une pratique plus proprement géométrique qui permet, elle aussi, de parfaire la connaissance de l'espace. Cet apprentissage repose notamment sur l'étude des solides (polyèdres, sphères, cylindres etc.), que l'utilisation d'outils mathématiques permet de mieux appréhender. Ainsi, l'étude des éléments de symétrie de ces objets (en particulier la recherche des rotations qui les conservent) est importante à la fois pour leur représentation et pour la compréhension de leur mouvement. L'examen et la construction de leurs sections planes, de leurs projections et de leurs contours apparents permet de multiplier les représentations de ces objets, planes ou en perspective, et donc de mieux les comprendre.

En tous les cas, le fait d'avoir construit, étudié, décortiqué des figures, planes ou non, est sans doute essentiel pour s'approprier une vision de l'espace et de ses représentations qui reste l'une des missions fondamentales de l'enseignement des mathématiques.

b) L'apprentissage du raisonnement.

Si le point précédent emporte aisément une large adhésion, il n'est pas aussi évident de justifier ce qui est l'une des originalités de l'enseignement de la géométrie, à savoir, la part considérable qu'y occupe l'apprentissage du raisonnement. Certes, chacun s'accorde à dire qu'être capable de raisonner est un atout crucial pour le citoyen,([4]) lui permettant d'exercer ses responsabilités de manière lucide dans notre société et de prendre sa part aux débats politiques, économiques et sociaux qui l'agitent. Mais, s'agissant de la géométrie, un débat philosophique récurrent oppose souvent tenants et adversaires de la méthode déductive à laquelle on l'identifie. Pour notre part, nous pensons que cette identification est très réductrice, que le raisonnement géométrique est beaucoup plus riche que la simple déduction formelle et que l'apprentissage de ce raisonnement, convenablement mené, est sans doute l'argument le plus fort en faveur de la géométrie.

Bien entendu, il y a beaucoup d'autres domaines dans lesquels le raisonnement peut s'exercer, avec d'autres formes tout aussi intéressantes, à commencer par d'autres branches des mathématiques et des sciences et il serait désastreux de vouloir aligner tous les modes de raisonnement sur les canons de la démonstration géométrique. Par exemple, le calcul constitue lui aussi, ne serait-ce que dans la justification de ses diverses étapes, une forme, simple mais authentique, de raisonnement. Le domaine numérique fournit d'ailleurs, dès l'école élémentaire, des situations dans lesquelles les élèves peuvent argumenter et raisonner, voir par exemple [E] (et notamment la situation du plus grand produit, p. 102). Le calcul mental, lui aussi, nécessite une forme de raisonnement intéressante en ce qu'il mobilise des théorèmes et des démonstrations spécifiques.

([4]) et, *a fortiori*, pour les scientifiques

Notre souci n'est donc pas d'ériger la géométrie comme une sorte de modèle idéal du raisonnement, renvoyant par là même dans les ténèbres extérieures tout ce qui n'en relèverait pas, mais d'insister sur les spécificités du raisonnement géométrique, qui nous semblent être les suivantes :
• Il s'agit d'un domaine qui peut être abordé assez tôt (au collège), où le raisonnement intervient dès le début et dans lequel on perçoit aisément les articulations d'une logique dont la portée est universelle.
• Il s'agit d'un domaine riche, varié, avec un aspect visuel et esthétique, voire ludique.
• Il s'agit d'un domaine dont les objets sont pertinents et utiles (cf. ci-dessous), (ce qui n'était pas le cas du latin que l'on présentait souvent aussi comme une école du raisonnement).

Nous décrirons au paragraphe 3 les conditions qui nous paraissent indispensables pour qu'un tel apprentissage du raisonnement s'exerce de manière efficace. Il est essentiel pour cela de ne pas sous-estimer deux difficultés :

• L'apprentissage des mathématiques en général, et de la géométrie en particulier, est difficile.
• Le raisonnement géométrique ne doit pas être réduit à l'apprentissage formel de la démonstration.

Sur le premier point, la difficulté de la géométrie est un point qu'il ne faut pas occulter. Son apprentissage nécessite, en effet, de la part des élèves, un investissement intellectuel important et un effort que tous ne sont pas prêts à consentir, surtout si l'ensemble du système ne les y incite pas. ([5])
Il est vrai que chaque élève (et même sans doute chacun des membres de la commission) peut se trouver, face à un problème de géométrie, dans la situation angoissante de "sécher". Il y a là une réalité que chaque mathématicien, chaque chercheur, chaque homme rencontre dès qu'il aborde un problème dont il ne connaît pas la solution, mais apprendre à surmonter cette difficulté nous semble un objectif essentiel, et pas seulement pour les mathématiques.

Sur le second point, il faut prendre en compte toute la richesse du raisonnement géométrique, qui s'appuie d'abord sur l'observation de la figure, avant de donner lieu à un véritable travail de recherche, avec l'élaboration de conjectures, soumises à un examen critique et qui permet enfin une validation définitivement convaincante par la démonstration, le tout en maintenant un dialogue permanent entre l'intuition et la rigueur. Nous reviendrons sur ce point au paragraphe 3.

c) Les aspects esthétiques et culturels de la géométrie.

Il est indéniable que la géométrie, qui prend ses racines dans l'antiquité, est une partie intégrante de la culture de l'humanité. Souvenons-nous de la devise de l'école de Platon : "que nul n'entre ici s'il n'est géomètre".
Certains objets de la géométrie, dont la considération remonte aux anciens grecs, ont pris, au travers des mythes de notre civilisation, une importance culturelle

([5]) En contrepartie, tous ceux qui, stimulés par l'enthousiasme de leurs professeurs et la beauté des figures, ont goûté à cette discipline, savent bien quelle source de plaisir elle peut être (et pas seulement les mathématiciens professionnels qui lui doivent souvent leur vocation).

considérable. C'est le cas, par exemple, des polyèdres réguliers (voir le *Timée* de Platon ou les premières visions cosmologiques de Kepler) ou de la mesure des longueurs et des aires (voir le problème de la reine Didon ou celui de la quadrature du cercle).

Mais la géométrie a aussi un rôle à jouer dans l'éducation esthétique des enfants, par les liens profonds qu'elle entretient avec les arts plastiques. On trouvera dans Kandinsky (Point et ligne sur plan, Denoël 1970) une discussion approfondie sur ces rapports dans le cas de la peinture, mais ils sont nombreux aussi avec la sculpture (par exemple, l'observation du drapé des statues est une bonne introduction à la notion géométrique de contour apparent). La géométrie est le moyen de dégager des invariants dans l'infini des formes qui nous entourent.
De fait, tous ceux qui ont étudié un peu la géométrie savent bien que la contemplation de belles figures est en soi une source de satisfaction esthétique (on peut penser aux polyèdres réguliers ou semi-réguliers, convexes ou étoilés, ou à certaines figures de géométrie plane : le cercle d'Euler, la configuration de Pascal, le théorème de Feuerbach, etc.). Les logiciels de géométrie, qui permettent aux plus maladroits de réaliser de belles figures, apportent beaucoup dans cette optique. De plus, certaines connaissances géométriques sont essentielles pour comprendre et apprécier la composition de maints tableaux classiques (la perspective, le nombre d'or, etc.).

L'urbanisme, lui aussi, est un grand utilisateur de géométrie, soit dans la création de quartiers nouveaux selon un plan géométrique (un quadrillage à Pompéi comme à New-York, un tracé concentrique à Karlsruhe, une grande croix centrale à Washington), ou, de façon plus subtile, par le percement de grandes artères reliant des monuments comme à Rome du temps de Sixte-Quint ou à Paris du temps d'Haussmann.
En architecture, enfin, la géométrie joue un grand rôle et les bâtisseurs de cathédrales n'auraient jamais pu exercer leur art sans la géométrie d'Euclide. Actuellement encore, lorsque l'idée s'élabore dans la tête de l'architecte, il ne peut l'exprimer et la transmettre que géométriquement. Plusieurs concepteurs ne peuvent communiquer entre eux que par le moyen de la géométrie. Enfin, pour convaincre le client ou le décideur, c'est souvent la beauté d'une épure qui dicte les choix.
Les techniques modernes ont d'ailleurs renforcé ce rôle de la géométrie en lui ouvrant de nouveaux domaines. Par exemple, l'utilisation du béton armé a conduit à privilégier, notamment pour la construction des voûtes, les surfaces réglées qui permettent d'allier élégance, légéreté et solidité (voir le CNIT ou certains châteaux d'eau).

d) La géométrie dans la vie courante.

La géométrie, par rapport à d'autres domaines des mathématiques et des sciences conserve un caractère concret, lié à son aspect visuel, qui fait qu'elle peut être utile à chacun, dans son métier comme dans sa vie de tous les jours. D'ailleurs, les livres de géométrie d'autrefois faisaient une grande place à cet aspect pratique. Par exemple, le traité de géométrie projective de Girard Desargues au dix-septième siècle avait pour but essentiel de donner des méthodes fiables pour la taille des pierres. De même, l'un des principaux objectifs de la géométrie descriptive de Monge était son application militaire. Plus près de nous, les manuels de géométrie de l'enseignement primaire des années 50 faisaient encore une large place aux

applications pratiques de la géométrie. L'accent y était mis notamment sur les mesures agraires et les calculs de volumes d'objets usuels (un tas de cailloux, un tonneau, une bille de bois etc.). Bien sûr, depuis ce temps, le nombre de nos concitoyens qui travaillent dans l'agriculture ou l'artisanat a beaucoup décru, mais ces notions conservent cependant une importance certaine et il reste des aspects de la géométrie très utiles pour de nombreux corps de métier (par exemple, la règle 3,4,5, issue de Pythagore, pour les maçons, la géométrie du triangle pour les charpentiers ou le tracé des massifs de fleurs elliptiques pour les jardiniers, etc.). De plus, de nouvelles technologies sont apparues qui font un appel constant à la vision géométrique et ce notamment dans tous les métiers où l'on utilise des logiciels de dessin.
Mais, au-delà de cette utilisation professionnelle, le citoyen ordinaire a l'occasion d'utiliser ses connaissances géométriques dans de multiples circonstances de la vie :
• pour lire des cartes, qu'elles soient routières ou pédestres (tous les randonneurs savent l'importance de la compréhension des lignes de niveau) ou pour s'orienter sur le plan d'une ville,
• en ce siècle où le bricolage est roi, pour comprendre les plans, pas toujours limpides, des objets à monter soi-même, ou encore pour déceler les éventuels problèmes sur le plan d'un appartement,
• pour déplacer des meubles (penser à une armoire dans un escalier) en étant capable de prévoir avant d'être coincé si la manœuvre est possible ou pas,
• pour interpréter correctement les multiples représentations géométriques de données statistiques (histogrammes, camemberts, etc.) dont les journaux sont friands et exercer en toute connaissance de cause ses responsabilités de citoyen.

e) La formation des techniciens et des ingénieurs.

La géométrie joue aussi un grand rôle dans les sciences et les techniques de l'ingénieur. Ce fait n'est pas nouveau et le plaidoyer de Gaspard Monge en faveur de l'enseignement de la géométrie comme école de rigueur et de précision, cf. [M], conserve une partie de son actualité :
Pour tirer la nation française de la dépendance où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère, il faut, premièrement, diriger l'éducation nationale vers la connaissance des objets qui exigent de l'exactitude, ce qui a été totalement négligé jusqu'à ce jour, et accoutumer les mains de nos artistes au maniement des instruments de tous les genres, qui servent à porter la précision dans les travaux et à mesurer ses différents degrés : alors les consommateurs, devenus sensibles à l'exactitude, pourront l'exiger dans les divers ouvrages, y mettre le prix nécessaire ; et nos artistes, familiarisés avec elle dès l'âge le plus tendre, seront en état de l'atteindre.
Il est vrai que les choses ont évolué depuis l'époque de Monge, mais les techniciens du bâtiment ou de la mécanique restent de gros utilisateurs de la géométrie (par exemple la résistance des matériaux est un domaine où penser géométriquement permet de comprendre rapidement les phénomènes, avant de s'engager dans de lourdes vérifications par le calcul).
Parmi les utilisations de la géométrie dans des domaines plus nouveaux, on peut citer l'importance cruciale prise par tout ce qui concerne l'imagerie et la conception assistée par ordinateur, avec tous les problèmes de reconstruction d'images, notamment dans le domaine médical, et le développement des logiciels

de vision 3D.
On peut aussi signaler les progrès récents de la robotique qui doivent beaucoup au développement de la géométrie algébrique réelle et de la géométrie algorithmique (le célèbre problème dit "du déménageur de pianos" n'est rien d'autre qu'une traduction mathématique de celui de l'armoire et de l'escalier évoqué ci-dessus).
On peut enfin évoquer l'emploi des courbes de Bézier dans l'industrie automobile ou aéronautique et jusqu'à l'utilisation de courbes et de surfaces dans le design.
Tout cela concourt à faire de la géométrie un point essentiel de la formation des techniciens et des ingénieurs comme en témoigne l'intérêt que lui portent, aujourd'hui encore, les grandes écoles.

f) La géométrie dans les autres sciences.

C'est un fait évident que les mathématiques, et notamment la géométrie, ont des applications dans beaucoup d'autres sciences et singulièrement en physique. Il n'est pas dans notre intention de dresser un catalogue exhaustif de ces applications, mais de donner seulement quelques exemples significatifs du rôle de la géométrie élémentaire en physique.
Cela nous conduit à laisser dans l'ombre des pans entiers de l'utilisation de la géométrie. Ainsi, parmi les notions enseignées au lycée, on sait bien que les vecteurs modélisent vitesses et forces, que le produit vectoriel joue un rôle crucial en électricité ou que les déplacements du plan permettent de modéliser les mouvements. Nous n'y reviendrons pas. À un niveau plus élevé on connaît l'importance des champs de vecteurs, gradients, etc. en électromagnétisme, des formes quadratiques en relativité et des espaces de dimension > 3, vus comme espaces des configurations, en mécanique. En écho à la théorie mathématique des invariants que nous évoquons dans l'annexe 1, on peut noter aussi que le seul fait de savoir que des lois physiques doivent être invariantes par certaines transformations permet d'en déterminer la forme (c'est le cas pour les lois de conservation ou pour la théorie de l'élasticité linéaire).
On pourrait multiplier les exemples. En vérité, il est fascinant de constater que la plupart des notions géométriques que l'histoire a conservées jouent aussi un rôle en physique. En contrepartie, l'intuition procurée par le monde physique est un guide essentiel pour la compréhension des notions mathématiques et la physique demeure, pour les mathématiciens, une source de problèmes toujours renouvelée (et parfois, de solutions !).

Le plus bel exemple de cette relation, exigeante mais fructueuse, entre la physique et la géométrie est sans doute celui de la mécanique céleste. Cet exemple est d'autant plus intéressant que les coniques ont été étudiées par les mathématiciens de l'antiquité indépendamment de leur rôle dans le mouvement des planètes qui n'a été identifié par Kepler qu'au début du dix-septième siècle. On voit ici que le vieux débat mathématiques pures, mathématiques appliquées n'est pas toujours pertinent.
Notons que les coniques ne sont presque plus enseignées actuellement au lycée (notamment leur définition à partir des foyers, fondamentale en mécanique, ne l'est plus).

Un autre champ d'application essentiel de la géométrie en physique est la mécanique des solides, où les déplacements de l'espace (rotation autour d'un axe, etc.) jouent un rôle essentiel.

Là encore, ces notions ont récemment disparu des programmes du lycée. ([6])

Un troisième exemple est l'optique géométrique qui fait appel non seulement à la géométrie euclidienne mais aussi à la géométrie projective (homographies de la droite, foyer-image, foyer-objet) et à la géométrie différentielle (caustiques, surfaces d'onde).

Un autre type d'application se situe en physique (ou chimie) des solides, avec la compréhension de la structure des matériaux, et leurs propriétés de régularité et de symétrie. Bien entendu on connaît depuis longtemps les cristaux et les groupes cristallographiques, mais de récents travaux ont ouvert d'autres horizons. On peut citer la découverte des fullerènes en chimie, notamment celle d'une molécule de carbone C_{60} admettant la symétrie d'un polyèdre à 60 sommets (on pensera à un ballon de football). Plus remarquable encore est la découverte de quasi-cristaux (certains verres ou certains alliages) qui présentent à la fois une symétrie icosaédrique locale, mais aussi une quasi-périodicité (cf. les pavages de Penrose). Il est d'ailleurs remarquable que ces phénomènes ne se comprennent bien que par la considération de polytopes en dimension 4 (cf. [SM]).([7])

Il y a beaucoup d'autres exemples d'intervention de la géométrie dans les sciences (la description géométrique des foliations et des inflorescences en botanique, le codage des protéines en biologie, etc.).
D'une manière plus générale, le mode de pensée géométrique est souvent d'une grande utilité dans les sciences. Un bel exemple en ce sens est celui des diagrammes de Feynmann (en physique des particules) où les propriétés géométriques des diagrammes permettent de prévoir des comportements que l'on peut ensuite vérifier par le calcul.
Bref, la géométrie, et plus généralement les mathématiques, sont partout, dans les sciences comme dans la vie. C'est un fait évident, mais essentiel, qui devrait sans doute inciter mathématiciens et enseignants de mathématiques à plus de disponibilité vis à vis des autres disciplines.

g) La géométrie dans les mathématiques.

Du strict point de vue de la recherche mathématique, la géométrie élémentaire est souvent considérée comme une science morte. C'est du moins ce que dit Bourbaki dans la phrase citée dans l'annexe 1, paragraphe *k)* et il est vrai qu'il n'y a plus, depuis près d'un siècle, de recherches au sens strict du terme dans ce domaine.

([6]) S'il arrive parfois que nos collègues physiciens oublient l'importance de la géométrie et plus généralement des mathématiques pour leur discipline, les modifications de programmes viennent la leur rappeler de temps à autre, à leur grand dam. Cela a été le cas lors des récents allégements des programmes de géométrie de terminale évoqués ci-dessus. Cela nous semble une raison supplémentaire pour lutter contre le cloisonnement excessif de nos disciplines.

([7]) On sait que les pentagones réguliers ne pavent pas le plan mais qu'ils pavent en revanche la sphère $\mathbf{S}_2$ en formant un dodécaèdre. De la même façon, les icosaèdres réguliers ne pavent pas l'espace $\mathbf{R}^3$ mais pavent la sphère $\mathbf{S}_3$, plongée dans $\mathbf{R}^4$ en formant un polytope régulier. Cette remarque est à la base de travaux récents dans ce domaine, cf. [SM].

Cependant, si l'on s'intéresse à la formation des mathématiciens ([8])(qu'ils soient professeurs, chercheurs ou qu'ils travaillent dans l'industrie ou la finance), nous pensons qu'il reste bien des raisons de conserver un enseignement de géométrie. Il y a trois grands arguments qui sous-tendent cette conviction.

Le premier c'est que cette constatation du fossé entre recherche et enseignement vaut pour tout ce qui est actuellement enseigné au lycée en mathématiques. En analyse, par exemple, les fonctions d'une variable réelle qui constituent l'essentiel des programmes ne correspondent pas non plus, en tant que telles, à un domaine de recherche bien vivace.

Le second argument c'est qu'il y a de nombreux domaines de recherche actuels, en mathématiques, qui ne relèvent pas directement de la géométrie élémentaire, mais où elle intervient de manière essentielle. Citons, par exemple :

– la géométrie différentielle, qui représente un pan essentiel des mathématiques d'aujourd'hui,
– les aspects géométriques des statistiques : analyse des données (étude de nuages de points dans un espace euclidien à n dimensions), approximation par moindres carrés, etc.,
– la recherche opérationnelle, via la programmation linéaire, qui fait largement appel aux polyèdres (problème de détermination de l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points),
– certains domaines de l'informatique, notamment ce qu'on appelle la géométrie algorithmique : tout ce qui concerne les graphes, les arbres, les maillages, les pavages, etc.
– l'imagerie et tout ce qui concerne la vision, et ses liens avec la géométrie projective.

Le troisième argument c'est qu'au-delà de ces thèmes où la géométrie reste présente, ce qui est fondamental, pour beaucoup de mathématiciens, c'est le fait de **penser géométriquement**. Il s'agit là de quelque chose qui est plus difficile à formuler, mais qui, d'expérience, est très utile. Nombreux sont les mathématiciens, pas nécessairement catalogués comme géomètres, qui tiennent ou ont tenu ce discours (Choquet, Lebesgue, etc.). Nous tentons ici d'expliciter brièvement cette conception.

Face à une situation qui n'est pas *a priori* géométrique, penser géométriquement signifie d'abord être capable de faire un dessin. De fait, chaque mathématicien a ses représentations concrètes de situations complexes qui lui servent de raccourcis de pensée. Pour celui-ci c'est le petit dessin qui rappelle la formule de dimension des fibres d'un morphisme, pour celui-là c'est la représentation d'un phénomène dans l'espace des phases (voir à ce sujet la belle introduction de [A]), pour tel autre enfin le dessin en dimension 2 d'une boule dans un espace de fonctions de dimension infinie. Parfois ces raccourcis, lorsqu'ils sont particulièrement efficaces, deviennent des objets mathématiques à part entière, véritables condensés d'information (on pense ici aux diagrammes de Dynkin).

([8]) Bien entendu, cette préoccupation ne doit nullement être prise en compte dans l'enseignement du second degré. Cependant, au regard de l'influence des mathématiques dans de multiples domaines de l'activité humaine, elle reste importante, au même titre que la formation des ingénieurs et des autres scientifiques.

Au-delà de cet aspect pratique, penser géométriquement c'est aussi être capable de s'appuyer sur l'intuition géométrique qu'on a acquise dans le plan et l'espace pour l'appliquer à des situations plus complexes.
Un exemple particulièrement probant de cette situation est celui de l'analyse fonctionnelle et notamment des questions de convexité où l'intuition de la dimension 2 ou 3 est essentielle (voir par exemple les théorèmes de Hahn-Banach, Krein-Milman, etc.)
C'est vrai aussi, dans un domaine radicalement différent, en algèbre commutative, où le fait d'avoir un dictionnaire avec la géométrie algébrique apporte un éclairage indispensable à la théorie en donnant le moyen d'avoir une intuition géométrique de notions aussi abstraites que les anneaux, les idéaux, etc.
En résumé, penser géométriquement, c'est avoir une vision **globale** d'une question mathématique, la perception plus locale intervenant ensuite, notamment avec les calculs.
Nous reviendrons dans la troisième partie de ce texte sur les conséquences que nous tirons de ce point pour l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée. En tous cas, il nous semble important que cette vision géométrique soit présente dans l'ensemble du programme de mathématiques et pas seulement dans l'espace restreint de la géométrie proprement dite.

h) Conclusion.

On aura compris que, pour notre commission, maintenir un enseignement de géométrie au collège et au lycée est un impératif absolu. La question qui se pose maintenant est d'adapter cet enseignement aux conditions nouvelles de l'enseignement, mais, avant cela, il est important de faire un bilan de l'état actuel de l'enseignement de la géométrie. C'est l'objet de la partie suivante.

2. La géométrie dans l'enseignement, hier et aujourd'hui.

Dans cette partie nous proposons une analyse de l'évolution de l'enseignement de la géométrie dans les quarante ans qui viennent de s'écouler. Cette période a été marquée par la réforme des mathématiques modernes à laquelle nous consacrons une étude particulière. L'essentiel de notre réflexion porte sur le collège et le lycée. Nous dirons un mot de l'importance de la géométrie à l'école primaire, mais nous n'évoquerons pas ici la place de la géométrie dans l'enseignement supérieur. En vérité la part occupée par la géométrie "élémentaire" y est très réduite, sauf dans la préparation des concours d'enseignement (CAPES, agrégation).

a) Avant la réforme des mathématiques modernes.

Notre référence est le programme de 1966. Bien entendu, il y avait encore plus de géométrie dans les programmes antérieurs (notamment dans les classes préparatoires).

La géométrie occupe une place centrale dans l'enseignement secondaire. Au collège, les programmes sont essentiellement centrés sur la géométrie euclidienne. Les cas d'"égalité" et de similitude des triangles jouent un rôle essentiel, ainsi que les invariants (angles, longueurs, etc.). On notera aussi l'importance du théorème de

l'angle inscrit, première approche de la géométrie anallagmatique. De même, on rencontre, dès la seconde, la division harmonique, cas particulier du birapport, donc un peu de géométrie projective. Les coordonnées et les vecteurs apparaissent en fin de collège, le produit scalaire en première. Les transformations sont étudiées systématiquement en terminale (y compris l'affinité et l'inversion en géométrie plane et les transformations de l'espace). Une partie importante du programme de terminale porte sur les coniques. On rencontre au lycée, en terminale, une théorie "riche" (au sens évoqué dans l'annexe 1) : la géométrie anallagmatique, avec des théorèmes non triviaux (par exemple le théorème de Feuerbach : le cercle des 9 points est tangent aux cercles inscrit et exinscrits). Plus généralement, si on s'en tient à la géométrie euclidienne plane "ordinaire" qui culmine en seconde, il suffit de parcourir un livre de cette époque en faisant les exercices pour se rendre compte de la complexité des démarches à mettre en œuvre pour résoudre un problème de géométrie "élémentaire".

b) La réforme des mathématiques modernes.

La réforme dite des mathématiques modernes intervient à la fin des années 60. Elle est précédée d'un large débat auquel participent à la fois des universitaires et des professeurs du second degré.
L'un des textes les plus représentatifs du courant d'idées novateur de l'époque est sans doute la préface du livre de Dieudonné : Algèbre linéaire et géométrie élémentaire [ALGE]. Ce texte, qui est un petit chef d'œuvre polémique, prend clairement parti pour un nettoyage de la géométrie. En voici une phrase assez caractéristique :
... car on chercherait en vain à qui d'autre qu'à des mathématiciens spécialisés sont destinées de jolies babioles telles que le cercle des neuf points ou le théorème de Dandelin.
En ce qui concerne la géométrie, l'idée fondamentale de la réforme est de promouvoir, à la place du système d'axiomes (implicite) d'Euclide-Hilbert, la notion d'espace vectoriel. Citons encore Dieudonné :
Il me semble qu'il y a intérêt à familiariser le débutant le plus tôt possible avec les notions essentielles de cette discipline (l'algèbre linéaire)*, à lui apprendre à "penser linéairement" ...*
Les programmes de 1970 reprennent largement ces idées, au moins au niveau du lycée, puisqu'apparaissent les notions d'espace vectoriel, bases, applications linéaires, etc.

c) Critique de la réforme des mathématiques modernes.

Cette critique n'a d'intérêt qu'en ce que cette réforme a laissé des traces encore très présentes dans l'enseignement actuel. Nous avons recensé cinq points de désaccord essentiels avec les principes mathématiques et épistémologiques de cette réforme, en ce qui concerne la géométrie :

• *Le projet du "tout linéaire".*

Ce projet, s'il pouvait sembler cohérent du point de vue mathématique, a été introduit sans qu'ait été menée une véritable réflexion didactique préalable. Il a conduit à un échec retentissant que ne suffit pas à expliquer l'impréparation du corps enseignant de l'époque et a rapidement été abandonné. Il semble y avoir, en effet, des raisons didactiques essentielles qui font qu'une introduction précoce

de l'algèbre linéaire n'est pas aussi simple que ne l'avaient pensé les collègues des années 60, on consultera à ce sujet les travaux de J.-L. Dorier *et al.* [Do]. Il est sans doute plus raisonnable de réserver cette introduction au premier cycle de l'enseignement supérieur, en la préparant dans le second degré par une pratique de la géométrie vectorielle.

En fait, l'intérêt du lien entre algèbre linéaire et géométrie nous semble plutôt en sens inverse, dans le fait que la géométrie usuelle en dimensions 2 et 3 fournit un support intuitif pour travailler en dimension supérieure à 3, voire en dimension infinie (par exemple en analyse fonctionnelle), voire sur un anneau au lieu d'un corps (en algèbre commutative), etc. D'ailleurs, historiquement, la formalisation de l'algèbre linéaire n'est véritablement intervenue que lorsque l'on a abordé ces problèmes plus généraux.

• *La minoration systématique du rôle des figures.*

Là encore, Dieudonné a le mérite de dire les choses clairement :

C'est ainsi qu'il serait désirable de libérer l'élève dès que possible de la camisole de force des "figures" traditionnelles, en en parlant le moins possible (point, droite et plan exceptés, bien entendu), au profit de l'idée de transformation géométrique du plan et de l'espace tout entiers...

Sur ce point, il semble bien que l'on a mis la charrue avant les bœufs : dans la construction d'une vision de l'espace, les figures jouent un rôle primordial et les mathématiciens qui ont promu la réforme des mathématiques modernes ont sous-estimé l'importance de cette pratique des figures, sorte de cordon ombilical qui fondait, sans doute à leur insu, leur intuition de l'espace. D'ailleurs, les figures (ou configurations) sont réapparues rapidement dans les programmes, mais, d'une certaine façon, le mal était fait et nombreux sont encore à l'heure actuelle les enseignants qui les regardent avec suspicion. Il y a sans doute, au niveau de l'élucidation de ce lien figure-raisonnement, un déficit de la formation des maîtres, cf. §3.d).

• *La minoration du rôle des invariants, notamment aire et angle.*

Nous renvoyons le lecteur à l'annexe 1 pour une explication de leur importance théorique qui nous semble essentielle. Pourtant, aujourd'hui encore, ce sont des mal aimés de notre enseignement et quelquefois des mathématiciens. Ainsi G. Choquet déclare dans une conférence donnée en 1995 pour l'association "Maths en jeans" à propos des angles orientés :

Pourquoi les monter en épingle ainsi que la cocyclicité alors que dans $\mathbf{R}^3$ *cette notion n'a plus de sens. En fait l'essentiel de la géométrie euclidienne peut être traité sans les angles.*

Nous ne partageons pas ce point de vue. Bien sûr, la notion d'angle présente plusieurs difficultés qu'il ne faut pas se cacher. D'abord, elle est multiple : angle "géométrique", de demi-droites ou de droites, orienté ou non. Ensuite, il y a la question de la mesure des angles, entachée depuis Dieudonné d'un soupçon d'incorrection (il parle de "l'insondable sottise de chercher à mesurer ce qui n'est pas mesurable") et il est vrai que pour les angles orientés, le mot mesure est à peu près le plus mauvais possible. En revanche, pour des angles non orientés, cette mesure (et son lien avec la longueur d'arc) est tout à fait légitime et importante.

Une des conséquences de cette frilosité à l'égard de ces notions est que l'on n'ose plus présenter comme preuves aux élèves les démonstrations géométriques

de la limite en 0 de $\sin x/x$ *via* l'aire du secteur et la longueur d'arc ou encore de l'existence des primitives *via* les aires. ([9]) Ajoutons enfin que l'importance historique, culturelle et pratique des notions de longueur, d'angle et d'aire et les relations fortes qu'elles entretiennent avec l'analyse, la mécanique, etc., imposent évidemment que ces notions occupent une place centrale dans notre enseignement.

• *L'abandon des cas d'égalité des triangles.*

Très contestés dans les années 60 (on connaît l'invective de Dieudonné : *A bas Euclide, plus de triangles !*), les cas d'égalité ([10]) ont disparu avec la réforme (et ne sont pas revenus depuis). Ce point nous semble un contresens, même (surtout ?) si l'on pense la géométrie en termes de transformations.

En effet, on sait bien qu'un problème crucial lorsqu'un groupe opère sur un ensemble est de dire s'il est transitif et sinon de décrire ses orbites. C'est ce que font les cas d'"égalité" qui donnent un critère commode permettant d'affirmer l'existence d'une transformation échangeant deux triangles sans être obligé, comme c'est le cas actuellement, d'exhiber celle-ci.

En outre, si on pense la géométrie en termes d'invariants il est clair que les cas d'"égalité" (qui affirment en gros que l'on a bien énuméré tous les invariants) constituent un outil mathématique essentiel. De plus, il suffit de prendre quelques exemples concrets pour se convaincre de leur efficacité et l'on peut dire sans exagération qu'en les supprimant on a privé plusieurs générations d'élèves de l'outil le plus simple pour faire de la géométrie.

Enfin, sur le plan de la cohérence de l'enseignement les cas d'"égalité" fournissaient un fondement de la géométrie (le système d'axiomes d'Euclide-Hilbert implicitement sous-jacent), imparfait certes, mais sur lequel les autres résultats reposaient à peu près solidement. En tous cas, de ce point de vue, la situation était finalement plus claire que celle qui prévaut actuellement (même si on peut aussi fonder la géométrie sur la symétrie axiale, cf. [Gu] ou [CF]).

Notons que les auteurs actuels de programmes semblent de notre avis puisque les cas d'"égalité" font leur réapparition dans les nouveaux programmes de seconde.

Il convient toutefois d'être prudent et de ne pas sous-estimer le rôle des transformations pour retomber dans le travers que dénonçait Choquet en 1961 (cf. [Cho]) :

On rencontre fréquemment la situation paradoxale suivante : le professeur étudie avec ses élèves une figure dotée d'un axe de symétrie évident ; pour établir l'égalité de deux segments, la tendance naturelle de l'élève est d'utiliser cette symétrie ; son professeur le lui interdit, au profit d'un cas d'égalité de triangles. Ne parlons pas de la faute pédagogique ainsi commise ; mais, d'une part, le professeur oublie que sa

---

([9]) On a ici un exemple d'une tendance pernicieuse de notre enseignement : face à des notions difficiles, au lieu de les aborder de front en y passant le temps nécessaire et, si l'on ne peut donner des démonstrations en bonne et due forme, donner cependant des justifications et des arguments, même s'ils sont incomplets, on opte aujourd'hui pour l'une des positions suivantes dont il n'est pas évident de déterminer quelle est la pire :
• faire disparaître la notion de l'enseignement,
• renvoyer à des jours meilleurs son étude,
• admettre tout sans tenter la moindre justification.

([10]) Bien entendu, le mot égalité est à proscrire. On peut dire, par exemple, cas d'isométrie, ou de congruence.

démonstration des cas d'égalité était basée implicitement sur la symétrie ; d'autre part, il présente les mathématiques comme un jeu vain, dans lequel des propriétés évidentes doivent être démontrées à partir d'autres propriétés qui le sont beaucoup moins.
Les arguments contenus dans ce texte, qui sont tout à fait recevables et expliquent la position prise à l'époque, doivent nous guider pour trouver une voie médiane entre le "tout transformations" et le "tout cas d'égalité".

• *La disparition des géométries riches.*
Il s'agit des géométries riches au sens du paragraphe *g)* de l'annexe 1, c'est-à-dire celles qui correspondent aux isomorphismes exceptionnels des groupes classiques, comme par exemple la géométrie anallagmatique.
Ces géométries ont toutes disparu de l'enseignement du second degré avec la réforme des mathématiques modernes et ne sont jamais revenues. Cela représente un appauvrissement considérable : il n'y a plus nulle part dans notre enseignement de situations d'une complexité comparable à celles du théorème de Feuerbach, par exemple.
De plus, la géométrie euclidienne elle même a été très appauvrie en perdant dans la bataille les résultats et les outils qui provenaient de ces géométries plus complexes (par exemple l'inversion, voire le théorème de l'angle inscrit qui n'est plus enseigné que du bout des lèvres).

d) L'état actuel.

On se reportera à l'annexe 2 pour la description (sommaire) des programmes.

Comme on l'a vu, l'échec de la réforme des mathématiques modernes a conduit à abandonner, dès la fin des années 70, l'introduction de l'algèbre linéaire, qui était la pierre angulaire d'une nouvelle vision de la géométrie. Cependant, peut-être parce qu'un retour en arrière était psychologiquement impossible, la géométrie n'est pas revenue à ce qu'elle était auparavant, ni sur le plan des contenus, ni sur le plan des méthodes.

D'abord, sur le plan des contenus, nombre de sujets ont disparu de notre enseignement (coniques, inversion, transformations de l'espace, etc.). La comparaison est particulièrement flagrante au niveau du lycée (mais, bien entendu, d'autres choses y sont enseignées, notamment en analyse).

Ensuite, sur celui des méthodes, le principe qui gouverne les programmes actuels est l'introduction progressive des transformations (en commençant par la symétrie axiale), sans utiliser les cas d'égalité et de similitude des triangles et en minorant le rôle des invariants (aire, angle).

e) Commentaires sur les programmes actuels.

• *L'enseignement primaire*
Tels qu'ils sont rédigés, les programmes semblent assez équilibrés, mais sans doute pas suffisamment explicites. Les anciens programmes de 1985 étaient accompagnés d'instructions concernant les activités géométriques qui étaient très intéressantes. Malheureusement ces instructions, qui pourraient encore être utiles aujourd'hui, ne sont plus diffusées, ce qui laisse trop souvent la place, en pratique, à une réduction de la géométrie à l'apprentissage d'un vocabulaire et à la manipulation des instruments.

• *Le collège*
Les programmes sont accompagnés de commentaires généraux concernant les principes de l'enseignement des mathématiques au collège, principes qui décrivent ce que doit être une activité mathématique et auxquels nous souscrivons volontiers :
... identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié.
Il nous semble cependant que, par rapport à ces excellents principes, l'accent n'est pas assez mis sur des activités qui peuvent mener à des situations de recherche authentique : constructions, recherche de lieux.

En conclusion, même si on peut avoir quelques réserves sur ces programmes, leur contenu est, somme toute, non négligeable : on ne peut pas dire que l'on ne fasse plus de géométrie au collège, même si l'on en fait nettement moins qu'il y a 40 ans.

• *Le lycée*
Les programmes nous ont paru assez pauvres :

— il y manque des points essentiels qui feront défaut, notamment en physique, dès le début de l'enseignement supérieur : transformations de l'espace, coniques,

— il n'y a plus nulle part de géométrie "riche",

— si l'on parcourt les livres, on trouve beaucoup d'exercices très standardisés (en particulier ce qui tourne autour des barycentres et des lignes de niveau).

— la géométrie est trop peu connectée aux autres domaines des mathématiques et des autres sciences.

En dépit de ces critiques, il est clair qu'il est possible de faire de la géométrie une véritable activité mathématique avec ces programmes, à la fois en géométrie dans l'espace et en géométrie plane. De plus l'introduction de la géométrie analytique, des vecteurs, des produits scalaire et vectoriel est un premier pas important vers un apprentissage ultérieur de l'algèbre linéaire.

3. L'enseignement de la géométrie, demain.

Ce paragraphe contient les premières propositions de la commission sur l'enseignement de la géométrie. Ces propositions découlent essentiellement des analyses précédentes. La commission n'étant pas chargée de proposer des programmes, elle s'est contentée d'énoncer des principes et de proposer les directions dans lesquelles il lui semble souhaitable de faire évoluer l'enseignement de la géométrie. Nous souhaitons évidemment que les concepteurs de programmes prennent en compte ces orientations, tout en veillant au respect des équilibres fondamentaux de l'enseignement des mathématiques. Un point nous paraît important : c'est la cohérence entre les divers niveaux d'enseignement. On voit trop souvent les professeurs de collège tenir pour quantité négligeable ce que les élèves ont appris à l'école, puis les professeurs de lycée nier ce que les élèves ont vu au collège et enfin les professeurs d'université considérer que les étudiants qui arrivent à l'université

ne savent rien. Il est important que les programmes veillent à renforcer les liens entre les divers degrés, mais aussi que les enseignants des divers niveaux puissent, plus souvent que ce n'est encore le cas à l'heure actuelle, avoir l'occasion de se parler.

a) L'enseignement élémentaire.

Nous avons déjà expliqué, au paragraphe 1.a) quels pouvaient être les thèmes d'un enseignement élémentaire visant à une connaissance familière de l'espace, avec une double fonction : permettre à chacun de maîtriser son environnement et servir de point d'appui pour l'apprentissage de la géométrie. Rappelons quelques mots clés de ces thèmes : repérage, déplacement, mesure, mais aussi reconnaissance, représentation et construction d'objets géométriques.
Une partie de cette étude des relations spatiales d'un sujet avec son environnement apparaissait autrefois dans la scolarité obligatoire, partagée entre diverses disciplines : mathématiques, géographie, dessin, travaux manuels, gymnastique, etc. À l'époque des mathématiques modernes elle a été, pour l'essentiel, rapatriée en mathématiques, mais a disparu depuis. Il nous semble important qu'elle reprenne sa place dans l'enseignement, en particulier, en primaire, l'objectif étant d'acquérir une certaine familiarité avec les objets du plan et de l'espace, avant même de parler de figures et de géométrie. Nous pensons qu'il ne faut pas sous-estimer cette phase, essentielle dans le développement de l'enfant comme dans l'histoire de l'humanité, dans laquelle les concepts géométriques les plus simples (point, droite, plan, courbe, etc.) peuvent prendre du sens. Les instructions des programmes parus en 1985 nous semblaient d'ailleurs aller dans ce sens.

Outre cet aspect d'apprentissage de l'espace, et dans la perspective d'une utilisation plus importante de la figure à tous les niveaux, l'enseignement élémentaire peut aussi être le lieu d'un premier travail spécifique sur le thème "voir sur la figure". On entend essentiellement par ces mots des questions d'analyse et de reproduction de figures (planes). Le type de tâches visé pourrait consister, par exemple, à repérer sur un dessin des intersections ou des alignements, à être capable de prolonger ou de déplacer certains éléments, à repérer des éléments non dessinés qui peuvent être utiles pour la construction, à décomposer la figure en sous-figures plus simples, etc. Un tel apprentissage, qui n'existe nulle part en tant que tel, serait sans doute très utile pour la pratique de la géométrie au collège.

En tous cas, un écueil nous semble devoir être évité, c'est celui d'une géométrie, réduite à l'apprentissage d'un vocabulaire et de quelques concepts trop formels, qui ne serait là, à titre culturel et symbolique, que pour marquer la place future d'un enseignement tenu pour important. Le risque serait alors de passer beaucoup de temps pour acquérir des connaissances dont l'utilité pratique ne serait pas évidente et dont il n'est même pas sûr qu'elles seraient réutilisées au collège.

Signalons enfin le problème, crucial et difficile, de la formation des maîtres du primaire en géométrie (et plus généralement en mathématiques). En effet, les étudiants qui arrivent à l'IUFM pour préparer le concours de professeur des écoles sont d'origines très diverses et certains présentent de graves lacunes en mathématiques, même au niveau de la scolarité obligatoire. Cela doit d'ailleurs nous amener à nous interroger sur l'efficacité d'un système dans lequel des étudiants, ayant pourtant atteint le niveau de la licence, ne maîtrisent pas les connaissances mathématiques du collège, ni même parfois celles de l'école

élémentaire. Sur ce dernier point, on peut penser qu'une des raisons de cette situation déplorable réside dans le fait que les programmes ultérieurs (notamment ceux de collège) ne reconnaissent et n'intègrent pas suffisamment les savoirs de l'école élémentaire.

b) Quoi enseigner en géométrie, au collège et au lycée.

Les recommandations de la commission, concernant le contenu d'un enseignement de la géométrie au collège et au lycée, s'articulent autour de cinq thèmes.

• *Développer la géométrie dans l'espace.*

L'importance d'une éducation à la vision dans l'espace a été évoquée ci-dessus comme l'une des raisons majeures en faveur de l'existence d'un enseignement de géométrie élémentaire. À l'heure actuelle, la plupart des programmes contiennent un chapitre de géométrie dans l'espace, mais il est souvent relégué en fin d'année et donc traité superficiellement, voire tronqué.
La commission souhaite au contraire que cet enseignement de géométrie dans l'espace prenne toute sa place. Elle suggère pour cela de proposer aux élèves des thèmes mathématiques suffisamment riches, permettant de disposer d'une panoplie d'exercices intéressants et variés. À titre d'exemple, nous indiquons ici deux thèmes d'étude qui nous paraissent aller dans cette direction. Il est clair qu'il y en a beaucoup d'autres et qu'on aura intérêt à les faire tourner.

Le premier thème est l'étude des polyèdres. Il s'agit d'un chapitre très riche de la géométrie, dont on a vu qu'il une grande importance culturelle et de nombreuses applications, à tel point qu'il paraît inconcevable que l'"honnête homme" puisse ignorer jusqu'à l'existence de ces objets. Bien entendu, un traitement rigoureux de ce thème nécessite des outils qui ne sont pas (ou ne sont plus) à la portée d'un élève de collège ou de lycée (les isométries de l'espace, un peu de théorie des groupes, des notions de convexité). Cependant, il subsiste tout un pan de la théorie qu'il est possible de mettre à la portée des élèves, c'est l'aspect combinatoire. En effet, à partir de la formule d'Euler (nombre de sommets moins nombre d'arêtes plus nombre de faces égale 2), que l'on peut admettre après expérience ou prouver avec la géométrie sphérique, cf. ci-dessous, ou encore par récurrence, on peut mener à bien la détermination des polyèdres réguliers, semi-réguliers de divers types, des deltaèdres (polyèdres dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux), etc. Outre l'intérêt visuel et plastique, il s'agit d'un domaine où il y a à produire de nombreux raisonnements simples mais non triviaux.

Le second thème est celui de la géométrie sphérique, culturellement essentiel lui aussi dans sa liaison avec l'étude de la terre. En effet, l'étymologie même du mot *géo-métrie* renvoie aussitôt à la mesure de la terre (ainsi la mesure du rayon terrestre par Eratosthene est une superbe application de la géométrie du collège). Il n'est pas très difficile d'aborder ce thème avec des élèves de lycée, grâce à l'image du globe terrestre, de ses méridiens et de ses parallèles. Si l'on veut bien admettre l'existence de l'aire d'un triangle sphérique et la valeur de l'aire de la sphère, on peut alors montrer la formule de Girard (la somme des angles d'un triangle de la sphère unité est égale à π plus l'aire du triangle).
Cette formule est séduisante à bien des égards. D'abord, il s'agit d'un résultat mathématique très profond, dont on déduit notamment la formule d'Euler sur les polyèdres. Ensuite, c'est une première incursion dans une géométrie non

euclidienne, ce qui, outre l'intérêt philosophique évident de la question, peut aussi s'avérer utile pour comprendre certaines visions modernes de l'univers (qu'elles s'appuient sur la relativité ou la théorie du *big-bang*). ([11])

• *Renforcer le rôle des invariants (longueur, angle, aire).*

Outre leur importance théorique, évoquée dans l'annexe 1, il y a de nombreuses raisons de promouvoir les invariants et notamment leur utilisation pratique. Il ne s'agit pas là, à proprement parler, d'un changement de programme, les invariants évoqués ici étant tous présents dans les programmes de collège, mais d'un changement d'état d'esprit. En effet, on voit trop souvent les enseignants répugner à utiliser les angles ou les aires pour montrer des propriétés géométriques, leur préférant l'usage des transformations, considéré comme plus noble. Il n'est pas question, bien entendu, d'écarter celles-ci, dont l'importance théorique est, elle aussi, essentielle, mais d'équilibrer et de diversifier les moyens mis à la disposition des élèves. Nous proposons que les professeurs s'appuient pour cela sur les notions intuitives de longueur d'arc et d'aire qui, si elles ne sont pas tout à fait évidentes à traiter avec toute la rigueur mathématique souhaitable, ont le mérite d'être imédiatement perceptibles. Une condition impérative pour que cela devienne effectif réside dans la qualité de la formation des maîtres que nous évoquons plus loin. En effet, pour pouvoir aborder sans crainte ces notions délicates il faut à la fois une réelle maîtrise des contenus mathématiques, mais aussi une réflexion sur leur transposition didactique au niveau de l'enseignement.

• *Mettre l'accent sur les problèmes de lieux géométriques et de constructions.*

Ce point sera évoqué dans le paragraphe suivant à propos de l'apprentissage du raisonnement. Notre motivation ici est d'ordre essentiellement didactique : il s'agit de proposer aux élèves des problèmes où la solution n'est pas immédiatement apparente, où un effort de recherche est nécessaire et où la démonstration trouve parfaitement sa justification.

• *Réhabiliter les cas d'isométrie des triangles.*

Nous avons regretté au paragraphe 2.c) ci-dessus leur disparition et noté que les nouveaux programmes de seconde prévoient de les réintroduire dans notre enseignement de la géométrie. Cela semble une piste intéressante, encore que le moment choisi nous paraisse trop tardif. Sur ce plan, une réflexion supplémentaire est obligatoire, qui prenne en compte à la fois l'aspect mathématique et épistémologique (le nécessaire équilibre entre transformations et cas d'égalité, cf. §2.c)), mais aussi la formation des professeurs.

• *Initier les élèves à une géométrie riche.*

Le lecteur se reportera à l'annexe 1 pour des éclaircissements sur ce que nous entendons par ce vocable qui implique une prise en compte de la complexité des mathématiques. Une suggestion (qui nous semble raisonnable) en ce sens, est de développer, en terminale scientifique, la géométrie anallagmatique (en gros, celle qui tourne autour de l'inversion), sans changer fondamentalement les outils du

([11]) Ce thème de la cosmographie est injustement délaissé par les mathématiciens, alors qu'il peut intéresser le plus grand nombre, comme on l'a vu récemment avec l'engouement du grand public pour l'éclipse.

programme. On peut, en effet, s'appuyer sur les propriétés géométriques des nombres complexes pour proposer une étude élémentaire des transformations homographiques du plan (en montrant notamment le comportement des droites et des cercles par ces transformations). Le sujet recèle une foule d'exercices intéressants (le birapport, son lien avec les angles orientés et avec la cocyclicité,cf. annexe 1, §*i)*, le théorème de Ptolémée, celui de Napoléon, le quadrangle harmonique, etc.)

c) Comment enseigner la géométrie.

Nous tentons, dans ce paragraphe, de donner quelques indications plus détaillées sur la façon de concevoir un enseignement de la géométrie conforme aux analyses développées ci-dessus.

• *Principes.*

Notre souci principal est que l'enseignement de la géométrie permette de former des élèves aux têtes bien faites, qui deviennent des citoyens capables de réfléchir et de comprendre et qui soient ainsi armés pour affronter les difficultés du monde qui nous entoure.

• *Penser géométriquement.*

Nous avons évoqué plus haut combien cette faculté de penser géométriquement était fondamentale dans les mathématiques comme dans bien d'autres domaines de l'activité humaine. Les enseignants, d'ailleurs, savent bien qu'il est souvent plus facile (et plus profitable pour les élèves) d'expliquer certaines mathématiques avec un dessin. Souvenons-nous de ce que dit Jean-Jacques Rousseau à ce sujet (dans Les confessions) :

Je n'ai jamais été assez loin pour bien sentir l'application de l'algèbre à la géométrie. Je n'aimais pas cette manière d'opérer sans voir ce qu'on fait, et il me semblait que résoudre un problème de géométrie par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle. La première fois que je trouvai par le calcul que le carré d'un binôme était composé du carré de chacune de ses parties, et du double produit de l'une par l'autre, malgré la justesse de ma multiplication, je n'en voulus rien croire jusqu'à ce que j'eusse fait la figure. Ce n'était pas que je n'eusse un grand goût pour l'algèbre en n'y considérant que la quantité abstraite ; mais appliquée à l'étendue, je voulais voir l'opération sur les lignes ; autrement je n'y comprenais plus rien.

De fait, l'aide d'un dessin est précieuse dans des exemples aussi divers que le calcul de la somme des n premiers entiers (ou des n premiers entiers impairs), l'étude d'une suite récurrente, l'encadrement d'une intégrale ou tout ce qui touche au théorème des valeurs intermédiaires. ([12]) Dans tous ces exemples, le dessin

([12]) Voici un autre exemple, très convaincant : il s'agit de montrer l'inégalité

$$(a+b+c)\sqrt{2} \leq \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} + \sqrt{a^2+b^2}.$$

Si l'on voit le premier membre comme diagonale d'un carré de côté $a+b+c$, un petit dessin donne aisément la solution.

Pour d'autres exemples, notamment en analyse et en combinatoire, le lecteur pourra consulter l'article de P. Terracher dans les actes du colloque Inter-IREM de géométrie 1994, cf. [DG].

indique clairement la conjecture et, souvent, la démonstration. Encore faut-il être capable de le faire et, simplement, d'y penser, ce qui ne peut sans doute être le cas sans une pratique préalable de la géométrie. ([13])

• *Apprendre aux élèves à voir dans l'espace.*

Nous avons vu plus haut que c'est un objectif essentiel de formation pour tous les citoyens. C'est aussi sans doute celui que l'on peut aborder le plus précocément (dès l'école élémentaire). Nous avons proposé ci-dessus de renforcer les programmes de géométrie dans l'espace du collège et du lycée par quelques thèmes qui puissent susciter l'intérêt des élèves (polyèdres, sphères).
Dans la pratique, un enseignement de géométrie dans l'espace peut prendre appui sur trois types de supports technologiques :
• l'utilisation d'un matériel en trois dimensions (polyèdres, sphères, etc.), avec tout l'attrait que peuvent avoir les matériaux actuels,
• l'utilisation des logiciels de géométrie permettant une visualisation dynamique et sous des angles différents d'une figure de l'espace,
• l'utilisation du dessin (perspective, patrons, sous-figures, projections, sections, etc.) qui relie la géométrie dans l'espace à la géométrie plane. Bien sûr il est plus difficile de faire le dessin d'un objet de l'espace, mais, en contrepartie, il arrive parfois que le seul fait de faire la figure donne la solution du problème (on pense ici au théorème de Desargues, entre autres).
Il y a déjà dans les programmes et les manuels actuels des tentatives intéressantes sur ce thème (sections de solides, etc.) qu'il serait bon de développer.

• *Apprendre à raisonner.*

Nous avons dit au paragraphe 1 combien cet objectif nous paraît central et évoqué deux difficultés : la difficulté de la discipline et la place de la démonstration.

De fait, si l'on regarde l'enseignement de la géométrie tel qu'il est pratiqué actuellement, une lecture, peut-être superficielle, des manuels peut mener à deux types de critiques :
• le contenu (cours, exercices, etc.) est un peu pauvre,
• les énoncés proposés aux élèves sont trop souvent donnés sous une forme fermée : " montrer que",([14]) suivie d'une propriété qui leur apparaît aussi évidente que les hypothèses et c'est là pour beaucoup un jeu incompréhensible et stérile. De plus, le découpage des textes en sous-questions trop détaillées transforme l'élève en ouvrier spécialisé qui n'a à exécuter que des tâches parcellaires dont il ne voit pas clairement la logique, et ne laisse pas une part assez grande à l'inventivité, ni à la maîtrise de la complexité. Enfin, un usage trop précoce et trop rigide des règles de démonstration fait que celle-ci perd son intérêt essentiel, qui est d'emporter la conviction, pour n'être plus qu'un exercice de style stéréotypé. Bref, on réduit le raisonnement à la démonstration, qui n'en est qu'un aspect.

([13]) Une constatation qu'ont faite tous les enseignants de DEUG de l'époque des mathématiques modernes c'est que leurs étudiants, qui avaient appris les espaces vectoriels au lycée mais ne pratiquaient plus les "figures", n'avaient aucune vision géométrique de l'algèbre linéaire et n'imaginaient pas que des dessins de droites, plans, etc. pouvaient les aider à comprendre les notions algébriques.

([14]) quand il ne s'agit pas de démonstrations à trous...

Il est difficile de dire si, dans la pratique quotidienne de l'enseignement, avec sa diversité et sa complexité, ces critiques correspondent à une réalité. L'un des problèmes est sans doute la confusion, très répandue dans notre enseignement, entre tâches d'apprentissage et d'évaluation.
Quoi qu'il en soit, nous voudrions rappeler ici notre point de vue sur la nature de l'activité mathématique, telle qu'elle apparaît notamment dans la pratique des chercheurs. En fait, le commentaire des programmes de collège évoqué plus haut décrit fort bien cette activité :
... identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié.([15])
La phase de démonstration, en effet, si elle est essentielle en ce que qu'elle est la garantie de la sécurité et de l'exactitude, n'est pas, en tous cas, la seule activité du mathématicien. Il y a dans tout travail de recherche une phase quasiment expérimentale, avec la formulation de conjectures et leur examen critique, notamment à l'aide de contre-exemples, qui précède la démonstration. Cette phase, qui est une véritable activité mathématique, peut (et doit) aussi se retrouver dans l'activité des élèves si l'on souhaite leur donner une véritable formation scientifique, qui aurait en plus l'avantage de se rapprocher de celle que développent les autres disciplines. Bien entendu, ce souci de confronter les élèves avec des problèmes plus ouverts n'est pas nouveau et on sait bien qu'il est très coûteux en temps et qu'il ne peut être pratiqué en permanence, mais il reste un objectif essentiel qui mérite d'être rappelé.

De ce point de vue, la géométrie (notamment les recherches de lieux et les constructions) est un endroit privilégié de recherche. En effet, tout n'y est pas algorithmisé à la différence d'autres chapitres du cours (nous pensons notamment aux études de fonctions ([16])). Sans doute, avec l'arithmétique et peut-être les probabilités, la géométrie est-elle le domaine où l'on pratique le plus cet acte de chercher, avec, parfois, le plaisir exaltant de **voir**, lorsque les choses deviennent soudain, au sens littéral, évidentes. ([17])

Nous avons aussi évoqué, au paragraphe 1, la difficulté de la géométrie, et notamment, dans les phases de recherche, le fait, psychologiquement difficile, y compris pour les mathématiciens, de "sécher".
Face à cela, il faut que les enseignants puissent, d'abord, dire aux élèves qu'il n'y a aucune honte à avoir et que "sécher" est un moment naturel de toute activité

([15]) les phases "exemples" et "conjectures" devraient sans doute être interverties !

([16]) Attention, cela ne signifie pas qu'il ne faut plus faire d'études de fonctions ! Les calculs aussi ont une grande importance.

([17]) Certains jugeront peut-être élitiste cette description de la géométrie, pensant que les différences vont se creuser entre ceux qui "verront" et les autres. Mais ne vaut-il pas mieux ces différences là que la pérennisation des différences sociales à laquelle conduit invariablement la tendance actuelle de nivellement par le bas ? De fait, la volonté, souvent affichée dans les programmes actuels, de n'aborder que des problèmes "clés en main", réduits à des actes élémentaires, n'est pas nécessairement le meilleur moyen de promouvoir les élèves issus des milieux défavorisés. C'est, en tous cas, ce que laissent penser certains travaux récents de didactique et de sociologie.

de recherche. Il faut, ensuite, qu'ils soient capables de leur fournir des méthodes d'investigation et de réflexion qui diminuent cette angoisse. On peut en effet apprendre à chercher, de manière réfléchie et méthodique et c'est un objectif qui vaut la peine qu'on y consacre du temps et de l'énergie. Par exemple, apprendre, dans un problème de construction, à faire une figure d'analyse ("supposons le problème résolu") est un outil dont l'importance dépasse la géométrie. Reconnaître, dans telle configuration complexe, la sous-figure simple qui va permettre d'utiliser les outils du programme, est aussi un exercice très formateur. A l'inverse, comprendre qu'il peut parfois suffire d'effectuer une construction supplémentaire pour que tout à coup le problème s'éclaire, est une façon d'apprendre à dépasser les apparences premières qui n'est pas seulement utile en mathématiques. Plus tard, grâce à la géométrie analytique, savoir qu'on peut toujours aborder un problème par un calcul convenablement mené et qu'un dialogue passionnant peut alors s'installer entre la géométrie et le calcul, est sans doute de nature à rassurer les plus inquiets.
Ajoutons que pour nombre de problèmes géométriques, l'usage des logiciels de géométrie peut être un réel secours. Nous y revenons ci-dessous.

Il est clair que les objectifs de formation au raisonnement évoqués ci-dessus sont ambitieux. Mais que peut-on espérer d'un enseignement sans ambition, sinon une société sans âme ?

• *Eviter l'obsolescence.*

On a pu constater souvent que certaines notions prennent, dans l'enseignement, une place disproportionnée par rapport à leur importance mathématique réelle et deviennent des objets d'enseignement figés. Il y a de multiples raisons didactiques à cela : le poids des manuels, la présence d'exercices faciles à évaluer, le rôle du baccalauréat, etc. Un exemple typique de ce phénomène est la place prise depuis quelques années au lycée par les problèmes de lignes de niveau. Il s'agit d'une application, certes intéressante, du produit scalaire, mais en aucune façon d'un point de passage obligé. Ce phénomène de sclérose de certaines notions nous semble dommageable, notamment par l'image figée qu'il donne des mathématiques. Il nous paraît donc important, afin d'éviter que ce type d'artefacts didactiques ne perdurent trop longtemps, de veiller à ce que les thèmes et les applications suggérés par les programmes, à côté du corpus fondamental, aussi intéressants soient-ils (et cela vaut aussi pour ceux que nous proposons) soient périodiquement renouvelés. Cela présente aussi l'avantage de fournir aux élèves (et aux enseignants) de nouvelles motivations.

• *Faire la place aux nouvelles technologies.*

Il existe aujourd'hui plusieurs logiciels de géométrie dynamique qui procurent à l'apprenti géomètre une aide considérable. Par exemple, l'utilisation des fonctions de type trace et animation, que proposent certains, pour la recherche de lieux géométriques est très efficace (et permet de produire de très belles figures, ce qui ne gâte rien). On dispose ainsi d'un nouvel outil dont il n'y a pas lieu de se priver et qui peut débloquer certains élèves, rebutés par la difficulté de notre discipline.
Il faut toutefois prendre garde à deux difficultés :
— ce n'est pas parce qu'on installe un élève devant un logiciel de géométrie qu'il fait de la géométrie,
— il devient plus difficile encore de convaincre les élèves de la nécessité de prouver une propriété lorsque le logiciel leur a répondu qu'elle était vraie.

De ce point de vue une large réflexion didactique, déjà commencée depuis plusieurs années, est indispensable pour que l'utilisation de ce nouvel outil conduise à une amélioration de l'enseignement et non l'inverse.

• *Lier la géométrie et les autres disciplines*

Là encore, ce que nous préconisons est un changement d'état d'esprit plutôt que des changements de programmes. En effet, les thèmes fédérateurs existent, que ce soit avec la géographie (tout ce qui concerne la mesure de la terre, ou les phénomènes astronomiques), avec la physique (le lien avec la cinématique et la mécanique notamment, cf. annexe 3), avec les arts plastiques (perspective et représentation des objets de l'espace), etc. En fait le problème majeur est sans doute au niveau de la formation des maîtres (de mathématiques comme des autres disciplines) qui ne leur donne pas toujours les connaissances nécessaires pour dialoguer avec les autres, ni l'habitude de ce dialogue.

d) La formation des maîtres.

L'expérience des mathématiques modernes a montré combien la formation des maîtres était un élément crucial de la réussite ou de l'échec d'une réforme. Même si les propositions que nous avons développées ci-dessus n'ont pas l'ambition de révolutionner l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée, il est sans doute indispensable de prévoir des mesures d'accompagnement du côté de la formation des maîtres. Nous les avons regroupées en quatre rubriques.

• *Renforcer la place de la géométrie dans les cursus universitaires.*

Actuellement la géométrie est trop souvent absente des cursus universitaires (DEUG, licence) et les étudiants ne recommencent à s'y intéresser que lors de la préparation au CAPES. Cette absence présente plusieurs inconvénients graves. D'abord elle tend à isoler et infantiliser la géométrie, vue par beaucoup d'étudiants comme "la mathématique des petits", par opposition à celle qu'ils pratiquent à l'université. Ensuite, elle pose un problème préoccupant pour la formation des maîtres, trop peu préparés en ce domaine pour dominer l'enseignement qu'ils devront dispenser au collège et au lycée. Nous souhaitons, au minimum, que tous les programmes de licence destinés aux futurs maîtres fassent une place à une réflexion sur la géométrie. Un tel enseignement pourrait s'appuyer sur les acquis des étudiants en algèbre linéaire et être centré sur les groupes de transformations, dans l'esprit du programme d'Erlangen, avec un regard sur des géométries non euclidiennes. Une autre voie peut être de mettre en évidence la continuité des modes de pensée menant de la géométrie élémentaire à la géométrie différentielle en passant par l'étude de la cinématique, des courbes et des surfaces. D'autres thèmes très séduisants peuvent aussi être abordés (axiomatiques, géométrie sphérique, polyèdres, constructions à la règle et au compas, etc.).

• *Renforcer la formation initiale des professeurs en géométrie.*

La situation de la géométrie dans l'enseignement supéri eur fait que les étudiants actuels ont, au moment où ils commencent à préparer les concours, un déficit considérable en matière de géométrie. Ils n'ont en effet, pour la plupart d'entre eux, jamais entendu parler des sujets évoqués ci-dessus. De même (et ceci explique sans doute la frilosité de certains professeurs à l'égard des invariants), on ne leur a jamais vraiment proposé de réfléchir, avec les outils que leur donne l'enseignement supérieur tant en algèbre qu'en analyse (notion de groupe, théorie de la mesure,

etc.), à des notions comme les angles et les aires, pourtant centrales dans leur futur enseignement.

Pourtant, il est essentiel que les professeurs possèdent une maîtrise suffisante de leur discipline sans laquelle ils ne peuvent exercer valablement leur métier. Nous donnons deux exemples un peu plus détaillés sur ce thème.

• Le premier concerne toujours les invariants (angles, aires). Il y a deux difficultés (au moins) sur ces sujets.
D'abord, sur ces notions, il s'avère souvent nécessaire de commettre de nombreux abus de langage (angles ou secteurs angulaires, angles ou mesures d'angles, aires ou mesures d'aire etc.). Il peut être légitime de commettre ces abus de langage avec les élèves, afin de ne pas compliquer inutilement les choses, et d'ailleurs les programmes le demandent souvent (de manière très variable selon l'époque). En revanche, il est impératif que les professeurs, eux, sachent parfaitement ce que recouvrent ces abus, en un mot qu'ils aient une conscience claire de ce qu'ils font.

Ensuite, sur ce même sujet, il est nécessaire et souhaitable de faire parfois admettre certains résultats aux élèves (par exemple la proportionnalité de l'aire du secteur circulaire et de la longueur de l'arc). Il y a alors deux nécessités pour les enseignants. D'abord il faut qu'eux-mêmes sachent prouver rigoureusement ces résultats car ils en sont, pour les élèves, la garantie scientifique. Mais ils doivent aussi être capables de leur proposer des justifications, empiriques peut-être, incomplètes certainement, mais qui reflètent le plus possible une réelle preuve qu'ils maîtrisent par ailleurs et sont capables de transposer.
Sur ce sujet, bien peu d'étudiants de CAPES seraient actuellement capables d'expliquer le lien entre l'aire du disque et la longueur du cercle (pourquoi le même nombre π intervient-il dans les deux cas ?), ainsi que de bâtir une construction cohérente des fonctions trigonométriques par des voies élémentaires (i.e. ne faisant pas appel à l'exponentielle complexe, solution didactiquement sans intérêt).
La conséquence de cette carence est inévitable : devenus professeurs, ils seront toujours gênés d'aborder ces questions et courront, au mieux, se réfugier derrière les manuels qui, sur ce sujet, sont souvent loins d'être clairs.

• Un autre exemple de cette nécessité de maîtriser son sujet est lié à l'utilisation des figures, et à son rapport avec le raisonnement. C'est un point qui semble souvent un peu suspect à nombre de professeurs. Il y a à cela deux raisons. L'une, essentiellement psychologique, tient au fait que nos jeunes professeurs n'ont pas suffisamment pratiqué la géométrie pour savoir quand on peut se fier à la figure et quand on doit la mettre en question. L'autre, purement mathématique, est qu'il y a quelquefois de vraies difficultés. Un exemple bien connu des professeurs de collège est le suivant. Il s'agit du théorème qui dit qu'un quadrilatère $abcd$ qui a deux côtés parallèles et égaux est un parallélogramme. Tel quel cet énoncé est incorrect (il faut vérifier en plus que le quadrilatère est convexe) ([18]). On constate une forte répugnance des professeurs de collège vis à vis de ce théorème, pourtant bien utile. Ils ont tendance à ne pas l'utiliser, attendant de disposer de l'outil vecteurs qui permet de le formuler plus facilement. Cette réticence nous paraît dommageable.

([18]) Cette difficulté se rencontre notamment dans l'étude de la réciproque du résultat suivant (cf. annexe 1) : si un point o est sur la médiane aa' du triangle abc on a l'égalité d'aires (positives) $\mathcal{A}(aob) = \mathcal{A}(aoc)$.

Certes, il y a une difficulté, mais il est préférable de la prendre en compte plutôt que de l'esquiver. Pour expliciter notre propos, partons, par exemple du problème très simple suivant : on a un parallélogramme $abcd$ et on considère les milieux m et n de $[ab]$ et $[cd]$. Il s'agit de voir que $mbnd$ est un parallélogramme. Dans ce cas, la figure montre immédiatement que le théorème s'applique (on voit sur la figure que le quadrilatère $mbnd$ est convexe et non pas croisé). La question est de savoir si les élèves peuvent s'appuyer sur la figure, sans entrer dans des démonstrations de convexité un peu complexes. Notre opinion est que c'est en effet souhaitable, surtout pour des jeunes élèves de collège. Ce que peuvent alors faire les professeurs inquiets c'est d'écrire (pour eux) une preuve rigoureuse afin d'être sûrs que la figure donne effectivement le bon résultat. Dans le cas présent il s'agit simplement de traduire la convexité par le fait que les diagonales $[bd]$ et $[mn]$ se coupent et de noter que cela vient du fait que les points m et n sont dans des demi-plans distincts limités par (bd). Encore une fois, il serait absurde d'entrer dans ces raffinements avec des élèves, mais il est non moins absurde de se priver d'un résultat commode. Il est clair que ce type de réflexion doit faire partie de la formation des maîtres en géométrie.

Enfin, il y a encore deux éléments importants qui doivent être pris en compte dans la formation des maîtres en géométrie : l'importance des problèmes ouverts et les liens avec les autres disciplines.

Il y a donc en ce domaine une tâche essentielle, qui incombe aux deux années de formation à l'IUFM, ([19]) et qui est de donner aux futurs professeurs une vision claire de ces questions, à la fois sur les plans théorique et didactique.

• *Maintenir le rôle de la géométrie dans les concours.*

Il est clair que la géométrie doit avoir une place importante dans l'évaluation des candidats aux concours et plus particulièrement au CAPES, et ceci, tant à l'écrit, pour vérifier que les candidats dominent effectivement la discipline, qu'à l'oral, pour s'assurer qu'ils ont réfléchi à la nécessaire transposition de leurs connaissances dans l'enseignement.

• *Développer la formation continue en géométrie.*

Toute modification des programmes implique pour les enseignants un effort de formation que l'institution doit leur permettre d'effectuer dans les meilleures conditions. C'est le cas pour certaines de nos propositions. Il ne faut pas oublier que les cas d'isométrie des triangles, par exemple, ont disparu de notre enseignement vers 1970 et que les professeurs actuels, pour la plupart, n'en ont jamais entendu parler. Bien sûr, il ne s'agit pas de concepts très difficiles et tous disposent dans leurs connaissances des outils sur les transformations permettant de comprendre rapidement l'intérêt de ces notions. Il est cependant nécessaire, si l'on souhaite un infléchissement de la façon d'enseigner la géométrie, que soient proposées des situations où les cas d'isométrie apportent un plus par rapport aux transformations. De même, sur les thèmes de géométrie dans l'espace ou de géométrie anallagmatique que nous proposons d'introduire il est nécessaire que soient proposés des stages de formation adaptés.

([19]) À ce sujet, les projets de diminution de la durée de la préparation à l'écrit du CAPES ne peuvent, sur ce plan de la géométrie, que nous inquiéter.

Enfin, en ces domaines comme en d'autres, la commission ne peut que renouveler son appel à la production de textes qui pourraient orienter les choix des professeurs (et des auteurs de manuels).

e) D'autres pistes.

La commission, dans l'état actuel de ses réflexions sur la géométrie, n'a pas encore abordé certains sujets importants qui devraient être l'objet de ses travaux ultérieurs. Parmi ces sujets, citons : la géométrie pour les non-scientifiques, la géométrie dans la formation des ingénieurs, etc.

4. Références.

[A] Arnold V. I., Équations différentielles ordinaires, MIR, 1974.

[ALGE] Dieudonné J., Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, Hermann, 1968.

[BL] Brito L. F., Langevin R., The sublexical structure of a sign language, Math. Inf. Sci. hum. (32e année, n° 125, 1994, p. 17-40).

[Cho] Choquet G., Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire, Brochure APM numéro 3, 1961.

[C] Chasles M., Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Bruxelles, 1837, réédition J. Gabay, 1989.

[CF] Cousin-Fauconnet A., Enseigner la géométrie au collège, A. Colin, 1995.

[D] Dieudonné J., La géométrie des groupes classiques, Springer, 1954.

[DG] Le dessin géométrique, de la main à l'ordinateur. Actes du colloque Inter-IREM de géométrie 1994, édité par l'IREM de Lille.

[Do] J.-L. Dorier *et al* L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, Coll. Recherche en didactique des mathématiques, La pensée sauvage, 1997.

[E] ERMEL, Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3, INRP, 1999.

[Gu] Guggenheimer H., Plane geometry and its groups, Holden Day, 1967.

[K] Klein F., Le programme d'Erlangen, coll. Le discours de la méthode, Gauthier-Villars, 1969.

[MR] Mainguené J. et Roy M.-F., Démonstration automatique en géométrie : une approche par la géométrie analytique, Bull. APMEP 421, mars-avril 1999.

[M] Monge G., Géométrie descriptive, Ed. Jacques Gabay, 1989.

[P] Perrin D., Quelques réflexions sur la géométrie et son enseignement.

[SM] Sadoc J.-F. et Mosseri R., Frustration géométrique, Coll. Aléa Saclay, Eyrolles éd., 1996.

[W] Weyl H., Invariant theory, Princeton mathematical Series, Princeton, 1946.

Annexe 1 : La géométrie élémentaire dans les mathématiques d'aujourd'hui

Nous proposons, dans cette annexe, une analyse des résultats de la géométrie élémentaire ([1]) à la lumière du programme d'Erlangen et de la notion d'invariant. Il s'agit d'**une** lecture sans doute partielle, voire partiale,([2]) de ce qu'est la géométrie, vue de manière très algébrique.

Attention, même s'il apparaît dans cette annexe qu'on peut montrer la plupart des résultats de la géométrie élémentaire par le calcul et sans faire usage de figures, il ne faut pas en déduire que c'est cela qu'il faut promouvoir dans l'enseignement, bien au contraire. De même, le choix que nous adoptons dans cette annexe d'illustrer notre propos sur l'exemple de la géométrie euclidienne **plane** n'est adopté que dans un but de simplification et il ne signifie nullement qu'il ne faille pas enseigner la géométrie dans l'espace, voir parties 1.a et 3.a,b,c).

Il est clair que la géométrie ne se résume pas au programme d'Erlangen qui n'est que l'ultime étape d'une longue histoire, qui trouve ses racines dans la mathématique grecque et se poursuit tout au long des siècles. Il est clair aussi qu'on ne peut faire abstraction, s'agissant de la géométrie, de l'interpénétration avec les autres domaines des sciences, mathématiques, physiques ou autres, riche d'applications multiples. Le texte qui suit ne prétend donc pas rendre compte de tous les aspects de la géométrie, il en présente seulement une vision, communément admise par les mathématiciens de l'an 2000.

Les faits évoqués ici sont bien connus depuis plus d'un siècle, mais pas toujours explicités par les mathématiciens et rarement enseignés à l'université, même en formation des maîtres.
Le lecteur qui trouverait ce texte écrit de manière un peu trop allusive pourra se reporter à la bibliographie.

a) Le programme d'Erlangen.

Il s'agit de la dissertation inaugurale de Felix Klein soutenue à Erlangen en 1872. Le travail de Klein se veut une unification de toutes les géométries que le dix-neuvième siècle a vu éclore, à côté de la géométrie euclidienne classique (géométries projective, anallagmatique, non euclidiennes, etc.). Sa thèse est qu'une géométrie

([1]) Rappelons qu'on appelle élémentaire une géométrie qui a été enseignée, à un moment ou à un autre, dans l'enseignement secondaire.

([2]) Dans cette annexe on ne prend pas en compte le point de vue historique et des aspects essentiels de la géométrie sont volontairement négligés : l'axiomatique, tout ce qui concerne la convexité ou la géométrie différentielle, etc.

consiste, pour l'essentiel, en la donnée d'un ensemble X et d'un groupe G de transformations de X. Les éléments de G sont les transformations "permises" dans la géométrie en question et ils caractérisent cette géométrie. Il s'agit, par exemple, des transformations affines pour la géométrie affine plane, ou des isométries affines pour la géométrie euclidienne plane ou encore des homographies pour la géométrie projective. Le plus souvent, l'ensemble X est muni de données supplémentaires, par exemple un ensemble $\mathcal{D}$ de parties remarquables (les droites, les cercles,...) et les transformations de G conservent globalement $\mathcal{D}$. Les propriétés relatives à la géométrie en question (propriétés affines, euclidiennes, projectives) sont celles qui sont conservées dans l'action du groupe, ainsi que le dit Klein (cf. [K] p.7) :
"*Étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*"
Par exemple, pour citer trois résultats célèbres, Pappus, qui n'emploie que les notions de concourance et d'alignement, est un théorème projectif tandis que Thalès, qui utilise des parallèles, est un résultat affine et Pythagore, qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien. On peut dire, en quelque sorte, que chaque théorème possède une (et une seule ?) niche écologique privilégiée, qui correspond au cadre dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité.
L'exemple du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit illustre bien cette idée. Ce théorème s'énonce d'abord dans un cercle : si a, b, c, a', b', c' sont six points d'un cercle et si les droites (bc') et $(b'c)$ (resp. (ca') et $(c'a)$, resp. (ab') et $(a'b)$) se coupent en u (resp. v, resp. w), les points u, v, w sont alignés.
Il n'est pas difficile de montrer ce théorème dans ce cadre par des arguments d'angles, c'est alors un théorème euclidien.
Il est clair cependant que ce théorème n'est pas énoncé là dans sa plus grande généralité. On peut aussi le montrer pour une ellipse, à partir du cas du cercle, par exemple en utilisant une affinité orthogonale. C'est devenu un théorème affine. On peut enfin le montrer pour une parabole ou une hyperbole en se plaçant dans le plan projectif et en transformant l'ellipse par une homographie. (3)
L'utilisation systématique des groupes de transformations permet, comme on vient de le voir sur cet exemple, d'obtenir de nouveaux théorèmes simplement en faisant agir le groupe. C'est ce que note Chasles avec un brin d'amertume (cf. [C] p. 268) :
Aujourd'hui, chacun peut se présenter, prendre une vérité quelconque, et la soumettre aux divers principes généraux de transformation ; il en retirera d'autres vérités, différentes ou plus générales ; et celles-ci seront susceptibles de pareilles opérations ; de sorte qu'on pourra multiplier, presque à l'infini, le nombre des vérités nouvelles déduites de la première ...
Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en géométrie ; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice.

(3) En fait, le plus simple pour prouver ce théorème c'est de le faire pour une conique quelconque du plan projectif (dans ce cadre ellipse, parabole, hyperbole sont toutes équivalentes). C'est finalement la démonstration la plus facile, ce qui est, somme toute, moral, puisque le théorème est ici débarrassé de la gangue des notions affines et euclidiennes inutiles et qu'il se démontre en utilisant l'invariant fondamental associé à une conique : le birapport.

b) Construction de géométries.

Même si, suivant Klein, on pense à une géométrie comme à un ensemble muni d'un groupe de transformations, encore faut-il en construire. Pour ce faire, de nombreuses approches ont été mises en œuvre dans l'histoire.

La plus ancienne est bien entendu celle des grecs, qui repose sur un système d'axiomes, celui d'Euclide (dont on a une version totalement rigoureuse depuis les travaux de Hilbert). Dans ce cadre le groupe des transformations est présent seulement de manière implicite, notamment au travers des cas d'"égalité" des triangles. ([4])

Une autre approche, plus récente, est celle de la géométrie analytique, initiée par Descartes, qui utilise les coordonnées. Dans ce cadre, les groupes de transformations apparaissent essentiellement comme les changements de coordonnées que l'on s'autorise dans la géométrie en question.

L'étape historique suivante a été l'introduction des notions vectorielles et affines (au dix-neuvième siècle) et de leurs divers avatars (projectifs notamment). Ces notions représentent du point de vue mathématique une simplification considérable du système d'axiomes. Le lien entre le point de vue vectoriel et celui de la géométrie analytique s'effectue *via* les repères (orthonormés ou non). Les groupes de transformations apparaissent essentiellement comme des sous-groupes ou des quotients du groupe linéaire, voir plus loin.

Dans tout ce texte nous adopterons essentiellement ce point de vue vectoriel, et nous utiliserons systématiquement des repères (orthonormés ou non). Bien entendu, cela ne présage en rien de propositions pédagogiques !

c) Les invariants, version naïve.

Lorsqu'on lit Klein avec les yeux d'un mathématicien actuel on ne peut qu'être en accord avec ce qu'il écrit, mais on reste un peu sur sa faim : le groupe des transformations permises indique bien dans quel type de géométrie on travaille, mais comment obtenir ou interpréter les théorèmes de cette géométrie ? En fait, ce problème est résolu au moyen de la théorie des invariants (à peu près contemporaine de Klein) que nous explicitons ci-dessous car elle ne manquera pas d'avoir des répercussions sur nos choix didactiques ultérieurs.

Considérons d'abord ces invariants en un sens intuitif. Il s'agit simplement alors des notions qui sont conservées par les transformations du groupe en question. Dans tous les cas qui nous intéressent, les groupes considérés sont formés d'applications linéaires ou déduites de celles-ci (applications affines, homographies). Ces applications conservent donc les structures vectorielles (resp. affines, projectives), notamment les propriétés d'alignement, les barycentres, etc. Nous examinons ici les invariants "du second degré" qui s'ajoutent à cette structure première qu'est la structure linéaire qui, bien qu'assez pauvre, donne cependant à elle seule un certain nombre de résultats.

([4]) Attention, au sens de Klein, c'est le groupe qui fait la géométrie. Ainsi, la géométrie euclidienne usuelle et les géométries non euclidiennes (celle de Poincaré, par exemple) sont distinctes car leurs groupes le sont, même si leurs axiomes de départ sont – presque – les mêmes.

Dans le cas de la géométrie euclidienne les invariants les plus immédiats sont les notions usuelles de longueur, d'orthogonalité ou plus généralement d'angle (orienté ou non selon qu'on considère les isométries positives ou négatives).
Dans le cas de la géométrie affine, les notions de longueur et d'angle ne sont plus des invariants, mais on dispose d'un (semi-)invariant qui est l'aire (algébrique) des triangles, vue comme (moitié du) déterminant de deux vecteurs. ([5]) C'est un semi-invariant seulement car si u est une transformation affine quelconque, l'aire est multipliée par $|\text{dét}\, u|$ (c'est un vrai invariant pour les transformations affines de déterminant 1).
Dans le cas de la géométrie projective l'invariant fondamental est le birapport de quatre points (dont un cas particulier est la notion de division harmonique), nous y reviendrons plus loin.

d) Invariants naïfs et théorèmes.

Dès que l'on est amené à faire des démonstrations en géométrie (et cela commence au collège), l'intérêt d'employer les invariants de la géométrie concernée s'impose comme une évidence.

Ainsi, en géométrie euclidienne on utilise évidemment longueurs et angles.
Montrons par exemple, en utilisant les angles orientés de droites, la concourance des hauteurs d'un triangle. On considère un triangle abc et les hauteurs bb' et cc' qui se coupent en h. On a les égalités d'angles suivantes : $(ah, bc) = (ah, bb') + (bb', bc)$ (Chasles), $(bb', bc) = (c'b', c'c) = (c'b', c'h) = (ab', ah)$ (angle inscrit). On en déduit, par Chasles, $(ah, bc) = (ab', bb') = \pi/2$, ce qui montre que ah est bien la hauteur issue de a.

De la même façon, en géométrie affine on utilise très souvent la notion d'aire.
Montrons par exemple la concourance des médianes d'un triangle. On note d'abord qu'un point o est sur la médiane aa' du triangle abc si et seulement si on a l'égalité des aires (algébriques) $\mathcal{A}(aob) = \mathcal{A}(aoc)$. On reprend les notations précédentes avec les médianes au lieu des hauteurs et on note g le point d'intersection de aa' et bb'. On a alors, $\mathcal{A}(gab) = \mathcal{A}(gbc) = \mathcal{A}(gac)$, d'où le résultat.
De la même manière, un argument d'aires montre le théorème de Thalès.

En géométrie projective enfin, on utilise le birapport, cf. par exemple [P] pour des preuves de Pappus et Pascal.

Deux questions fondamentales se posent, par rapport à ces pratiques familières :
1) Nous avons, dans chacun des cas, repéré certains invariants de la géométrie donnée. Mais, n'y a-t'il pas d'autres invariants que ceux trouvés ?
2) Nous avons utilisé les invariants pour montrer les théorèmes ci-dessus, mais ce recours aux invariants est-il obligatoire ?

Il est à peu près impossible de répondre à ces questions dans le cadre naïf dans lequel nous nous sommes placés. C'est pourquoi nous allons maintenant quitter le cadre géométrique pour retrouver un cadre algébrique plus formel où ces questions vont recevoir des réponses mathématiques précises.

e) Les invariants, version polynômes.

([5]) C'est aussi le produit vectoriel, mais cette notion n'a pas vraiment de sens hors du cadre euclidien.

Il s'agit de la théorie des invariants associés à un groupe. Cette théorie a été fondée vers le milieu du dix-neuvième siècle par Cayley, Sylvester et Hermite. Elle est au centre de ce que nous avons en vue ici.

Expliquons-en le principe dans le cas de la géométrie euclidienne plane.

Lorsqu'on travaille en géométrie euclidienne on considère au départ des points donnés du plan. Prenons l'exemple le plus simple : celui de la géométrie d'un triangle a, b, c. Ces points sont décrits par leurs coordonnées dans un repère orthonormé o, e_1, e_2: $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$. ([6]) Les points $a, b, c, \cdots$ étant arbitraires on peut considérer leurs coordonnées comme des indéterminées et nombre de constructions géométriques usuelles de points du plan à partir des données (par intersections de droites, cercles, ...) conduisent à des points dont les coordonnées sont des polynômes ou des fractions rationnelles en les a_i, b_i, c_i (c'est le cas par exemple pour le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit ou l'orthocentre du triangle a, b, c). Dans tous les cas, ces coordonnées sont des fonctions des a_i, b_i, c_i.
Choisissons maintenant a comme origine pour simplifier les calculs. Le groupe G des isométries (vectorielles) agit linéairement sur les coordonnées des points b, c par l'intermédiaire des matrices orthogonales, ainsi la rotation de centre a et d'angle θ s'écrit

$$\rho(b_1, b_2) = (\cos\theta\ b_1 - \sin\theta\ b_2, \sin\theta\ b_1 + \cos\theta\ b_2).$$

Plus généralement, si u a pour matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, on a

$$u(b_1, b_2) = (\alpha b_1 + \beta b_2, \gamma b_1 + \delta b_2).$$

On en déduit une action de G sur l'anneau de polynômes $\mathbf{R}[b_1, b_2]$ (et sur le corps des fractions rationnelles, ou plus généralement sur les fonctions de b_1 et b_2) définie au moyen des formules ci-dessus. Précisément, si P est un polynôme et u une isométrie, on pose :

$$(u.P)(b_1, b_2) = P(u^{-1}(b_1, b_2)),$$

où le passage à l'inverse est là pour des raisons de variance, c'est-à-dire pour avoir $uv.P = u.(v.P)$. Bien entendu G opère aussi sur $\mathbf{R}[b_1, b_2, c_1, c_2]$ en posant

$$(u.P)(b_1, b_2, c_1, c_2) = P\big(u^{-1}(b_1, b_2), u^{-1}(c_1, c_2))\big)$$

et on a évidemment une définition analogue avec un nombre quelconque de points.

On désigne simplement par le mot **invariants** les polynômes (ou les fractions rationnelles, voire les fonctions) invariants par cette action. En fait, ces invariants ont un sens géométrique, c'est ainsi qu'on retrouve parmi eux les produits et carrés scalaires $(b|c) = b_1c_1 + b_2c_2$, $(b|b) = b_1^2 + b_2^2$ et $(c|c) = c_1^2 + c_2^2$, ce qui montre que les

([6]) Pour simplifier on prendra souvent a comme origine, ce qui revient à bannir les translations du groupe des isométries (sinon il faut remplacer dans les formules les points $b, c, \cdots$ par les vecteurs $b - a, c - a, \cdots$.)

invariants algébriques ne sont rien d'autre, bien entendu, que les invariants naïfs vus ci-dessus : angle non orienté et longueur.

Le premier point fondamental de la théorie des invariants, dans le cas du groupe orthogonal comme d'ailleurs de tous les groupes dits "classiques" qui gouvernent les géométries usuelles, c'est qu'on sait déterminer explicitement **tous** les invariants. Dans le cas où l'on part de deux points b et c (en plus de l'origine a) les invariants du groupe $O(2,\mathbf{R})$ de toutes les isométries s'expriment polynomialement à partir des produits et carrés scalaires $(b|c)$, $(b|b)$ et $(c|c)$. ([7]) Pour le groupe des rotations $O^+(2,\mathbf{R})$ il y a, en plus, le polynôme $b\wedge c = b_1c_2 - b_2c_1$ (qui correspond au sinus de l'angle orienté ou encore à l'aire algébrique du triangle abc). Ce n'est pas un invariant pour $O(2)$, mais tout de même un semi-invariant : il est transformé en son opposé par une isométrie négative.
Ces résultats donnent déjà la réponse à la question 1) du paragraphe *d)* : les invariants distance et angle sont bien, dans le cas de la géométrie euclidienne d'un triangle, les seuls possibles.

Dans le cas de la géométrie affine du plan, avec deux points b et c (a étant toujours pris comme origine) il y a un seul invariant pour les transformations affines de déterminant 1 qui est le déterminant $b\wedge c = b_1c_2 - b_2c_1$ (qui correspond comme on l'a vu à l'aire algébrique du triangle abc).

f) Relations et théorèmes.

Il y a deux idées fondamentales qui justifient l'importance de la théorie des invariants. Reprenons le cas de la géométrie euclidienne, avec une origine a et deux points b et c.

Idée 1 : points et invariants.

Comme les points b et c ont des coordonnées indéterminées, l'origine a et les points b, c forment un repère affine du plan.
On montre facilement que les coordonnées **dans ce repère** des points construits, par des constructions usuelles de la géométrie euclidienne, à partir des points base sont des polynômes ou des fractions rationnelles en les indéterminées b_i, c_i (et en tous cas des fonctions des b_i, c_i) qui sont des **invariants**, cf. [P] annexe 2. Par exemple, le pied a'' de la hauteur du triangle abc issue de a a pour coordonnée sur le vecteur b

$$x = \frac{c_1^2 + c_2^2 - b_1c_1 - b_2c_2}{b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 - 2b_1c_1 - 2b_2c_2}$$

dont on vérifie aussitôt qu'il s'agit bien d'une fraction rationnelle invariante qui s'écrit en fonction des produits et carrés scalaires

$$x = \frac{(c|c) - (b|c)}{(b|b) + (c|c) - 2(b|c)}.$$

On retrouve ce type de formules avec les droites remarquables du triangle et leurs points de concours (centre de gravité, centre du cercle circonscrit, ou orthocentre).

([7]) Il est facile de voir que toute fonction $f(b_1, ..., c_2)$, invariante par $O(2)$ s'écrit sous la forme $g\big((b|b), (c|c), (b|c)\big)$. Ce fait n'est rien d'autre que le premier cas d'égalité des triangles, résultat fondamental injustement oublié de nos jours ! Si f est un polynôme, on montre que g en est un aussi, mais c'est un peu moins évident, cf. [W].

Idée 2 : théorèmes et syzygies.

On montre, facilement là encore, que toutes les propriétés usuelles de géométrie (alignement ou cocyclicité de points, concourance de droites) s'expriment comme des **relations** ([8]), polynomiales elles aussi, entre les coordonnées des points en question (ou les coefficients des droites). Par exemple, dire que les points $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$ sont alignés c'est dire que le déterminant 3×3 suivant est nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Pour illustrer ce principe, voici la démonstration en termes de relations entre invariants, de la concourance des médianes et des hauteurs du triangle.

Exemple 1 : les médianes.

On considère un triangle a, b, c. Dire que l'origine o du plan est sur la médiane de bc signifie qu'on a $a \wedge (b + c) = 0$ (cette relation n'est rien d'autre que l'égalité d'aires vue au paragraphe *d)*). Or, on a la relation

$$a \wedge (b + c) + b \wedge (c + a) + c \wedge (a + b) = 0$$

qui traduit la bilinéarité et l'antisymétrie du déterminant, de sorte que si on prend pour origine l'intersection de deux des médianes, elle est aussi sur la troisième.

Exemple 2 : les hauteurs.

On considère un triangle a, b, c. Dire que l'origine o du plan est sur la hauteur issue de b signifie qu'on a $(b|a - c) = 0$. Or on a la relation

$$(b|a - c) + (c|b - a) + (a|c - b) = 0$$

qui traduit la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire, de sorte que si on prend pour origine l'intersection de deux des hauteurs elle est aussi sur la troisième.

g) Relations et théorèmes, suite.

L'intérêt d'avoir identifié les théorèmes d'une géométrie et les relations entre les invariants de cette géométrie vient alors du second résultat fondamental de la théorie des invariants. En effet, ce résultat affirme que, dans toutes les géométries usuelles, non seulement les invariants sont connus, mais encore les relations entre eux le sont aussi. Par exemple, dans le cas de la géométrie euclidienne plane avec seulement deux points base b, c en plus de l'origine, il n'y en a aucune pour les invariants $(b|b)$, $(c|c)$ et $(b|c)$ relatifs à $O(2)$ (hormis la bilinéarité et la symétrie). Dans le cas de $O^+(2)$ où l'on a l'invariant supplémentaire $b \wedge c$, elles se déduisent toutes de la relation

$$(b|c)^2 + (b \wedge c)^2 = (b|b)(c|c), \tag{1}$$

([8]) on dit aussi des syzygies, dans ce cas

(identité de Lagrange) qui n'est autre que la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. (On se reportera à [W] pour toutes précisions sur ces questions. Les invariants du groupe orthogonal $O(2)$ sont toujours les produits et carrés scalaires, mais à partir de 3 points il y a des relations non banales entre eux. Par exemple, pour trois points b, c, d le déterminant de Gram 3×3 formé avec les produits scalaires de b, c, d est nul).
Ainsi, ce qu'affirme la théorie c'est qu'on peut, en principe, obtenir mécaniquement tous les théorèmes de géométrie à partir de ces invariants et de leurs relations (voir par exemple l'article [MR] du bulletin de l'APMEP pour une discussion sur ce thème).([9])

h) Autres exemples en géométrie euclidienne.

Un exemple un peu moins évident consiste à montrer que la relation fondamentale (1) ci-dessus est exactement la traduction analytique, dans le cas du triangle a, b, c avec $a = (0, 0)$, de la célèbre propriété de la droite d'Euler : le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle a, b, c sont alignés, cf. [P] annexe 3. De même, le théorème affirmant que le symétrique de l'orthocentre du triangle par rapport à un côté est sur le cercle circonscrit est lui aussi une traduction de la relation (1).

i) Invariants et syzygies, encore un exemple.

Cet exemple, qui est peut-être plus convaincant encore que ceux qui portent sur la géométrie euclidienne, est issu de la géométrie anallagmatique, géométrie de l'inversion ou de la sphère de Riemann $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ (le plan complexe plus un point à l'infini) qui permet de voir droites et cercles dans leur ensemble (les droites passant par le point à l'infini). Le groupe correspondant est le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ des homographies (à coefficients complexes) $z \mapsto \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, avec les conventions usuelles sur le point à l'infini.
Un invariant bien connu de ce groupe est le birapport :

$$[a, b, c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a},$$

avec là encore les conventions usuelles sur le point à l'infini. Lorsque a, b, c, d sont 4 points distincts de $\widehat{\mathbf{C}}$, il est facile de calculer l'argument de $[a, b, c, d]$ en termes d'angles orientés de vecteurs et on en déduit que les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel.
Or, si a, b, c, d, p, q, r, s sont 8 indéterminées, on a une relation, évidente mais splendide, entre les birapports :

$$(2) \qquad [abrs]\,[bcps]\,[caqs]\,[pqcd]\,[qrad]\,[rpbd] = 1.$$

Cette relation entre les invariants ("le théorème des six birapports") est source de nombreux théorèmes géométriques ; citons par exemple le suivant dans lequel on a pris $s = \infty$:

([9]) Cette constatation théorique est importante, mais, bien entendu, cette écriture mécanique des théorèmes n'est en aucune façon un objectif d'enseignement.

Soient a, b, c trois points non alignés du plan et p, q, r trois points distincts de a, b, c, situés respectivement sur les droites bc, ca, ab. Alors les cercles circonscrits aux triangles cpq, brp, aqr ont un point commun d (appelé le "pivot").

Il y a une kyrielle de résultats classiques et spectaculaires qui ne sont que des avatars de la formule (2) : le théorème de la droite de Simson, celui des 6 cercles de Miquel, cf. [P] annexe 4. Là encore, comme avec la formule (1), on a vraiment l'impression que tous les théorèmes de cocyclicité-alignement de ce style ne sont que des variantes de cette relation entre les birapports.

j) Quels groupes ?

On a vu ci-dessus que le groupe de la géométrie euclidienne plane est essentiellement le groupe orthogonal $O(2)$. Plus généralement, les groupes qui interviennent dans les géométries usuelles sont les groupes dits classiques. À des variantes près, il s'agit du groupe linéaire $GL(n, \mathbf{R})$ et de ses sous-groupes usuels, orthogonal $O(q)$ (relatifs à une forme quadratique q euclidienne ou non), voire symplectique $Sp(f)$ (relatif à une forme alternée f).

Du point de vue de la géométrie "élémentaire" plane, les groupes qui interviennent sont tous des groupes du type ci-dessus, en petite dimension, mais pas seulement en dimension 2. Par exemple la géométrie projective plane correspond au groupe $PGL(3, \mathbf{R})$, la géométrie anallagmatique plane correspond à un groupe de Lorentz en dimension 4 et la géométrie de Poincaré correspond à un groupe de Lorentz en dimension 3. L'importance de la géométrie euclidienne "ordinaire" vient du fait que le groupe $O(2)$ qui la gouverne est un sous-groupe d'à peu près tous les autres, de sorte que la géométrie euclidienne plane apparaît comme une sous-géométrie (ou une sur-géométrie ?) de toutes les autres géométries planes.

Une remarque importante qui découle du point de vue du programme d'Erlangen est la suivante. En dimension $n > 5$ les groupes classiques considérés sont tous distincts et non isomorphes (cf. [D] §9), mais, en dimension ≤ 5 apparaissent un certain nombre d'isomorphismes exceptionnels non triviaux (cf. [D] §8 pour une liste exhaustive).

L'exemple le plus spectaculaire de tel isomorphisme concerne la géométrie anallagmatique plane cf. §*i)*. Algébriquement l'isomorphisme s'exprime ainsi : si q désigne la forme de Lorentz sur $\mathbf{R}$ en 4 variables : $q(X, Y, Z, T) = X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2$ on a un isomorphisme de son groupe orthogonal direct avec le groupe des homographies à coefficients complexes :

$$O^+(q) \simeq PGL(2, \mathbf{C}).$$

On peut penser que ces isomorphismes jouent un grand rôle dans la géométrie élémentaire et que les théories dans lesquelles on rencontre un isomorphisme de ce type sont particulièrement riches. Dite de manière grossière, l'idée est la suivante : le fait que le groupe admette ainsi deux variantes fait que la géométrie en question cumule les deux types d'invariants "naturels" correspondant à ces variantes, dans l'exemple précédent l'invariant birapport de $PGL(2, \mathbf{C})$ et l'invariant φ de $O(q)$ (la forme polaire de q qui donne les notions d'orthogonalité ou de contact des cercles-droites) et donc produit deux fois plus de théorèmes "intéressants". Cet isomorphisme explique sans doute la richesse de la géométrie anallagmatique (que l'on vérifie en parcourant les vieux manuels). Il y a deux autres exemples "élémentaires" de telles géométries riches : celle d'une conique projective et celle d'une quadrique projective, exemples bien connus des taupins des années 50.

k) Le point de vue de Bourbaki.

La constatation que nombre de propriétés géométriques se réduisent à quelques relations algébriques simples fait dire à N. Bourbaki (dans ses éléments d'histoire des mathématiques) que la géométrie élémentaire est morte :
Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui parvient enfin à formuler des méthodes générales permettant en principe d'écrire tous les covariants algébriques et toutes leurs "syzygies" de façon purement automatique ; victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie "élémentaire", qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire. Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc.) Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ...

Le texte ci-dessus n'est guère discutable en ce qui concerne la disparition de la géométrie élémentaire du domaine de la recherche mathématique, mais on peut regretter que Bourbaki reste muet sur le point évoqué ci-dessus : le fait que, dans certaines géométries, le groupe fondamental possède plusieurs variantes, ce qui n'est pas sans conséquences sur les invariants et, partant, sur la géométrie.

l) Conclusion.

Nous retiendrons de l'étude précédente, conformément au programme d'Erlangen, l'importance du groupe de transformations associé à une géométrie. Aucun mathématicien actuel ne peut mésestimer ce point. Cependant, ce qui précède montre aussi l'importance, à côté du groupe, des invariants associés et des relations entre ces invariants. Dans le cas de la géométrie euclidienne plane cela veut dire l'importance cruciale des notions de produit scalaire et vectoriel (si l'on est dans un cadre vectoriel) ou encore, à un niveau plus élémentaire, des notions de longueur, angle et aire (si l'on est dans le cadre usuel du plan régi par les axiomes d'Euclide). Il nous semble, à cet égard, que les programmes actuels du collège, héritiers en cela de ceux des mathématiques modernes, minorent ces notions d'aire et surtout d'angle, voir paragraphe *2.c*.

Annexe 2 : Les programmes de géométrie en 1999

1. L'école élémentaire.

Les apprentissages se déroulent de manière continue de la petite section de maternelle jusqu'au CM2. Un vocabulaire précis doit être progressivement mis en place (exemple : cercle et disque).
Le principe est de partir du réel (et donc d'objets matériels) et d'abstraire peu à peu. La primauté est donnée à la géométrie dans l'espace.
Il n'y a pas de démonstrations, bien entendu, mais un début d'apprentissage du raisonnement, notamment dans les activités de reproduction de figures.

a) Les objets étudiés.

• Quelques objets de l'espace : cube, tétraèdre, pavé, avec les notions de face, arête et sommet.
• Quelques figures planes : carré, rectangle, losange, parallélogramme, triangle, cercle et quelques notions de géométrie plane : perpendiculaire, parallèle, angle. L'accent est mis sur la reconnaissance de sous-figures.
• La symétrie axiale (à partir des pliages, reconnaissance des axes de symétrie d'une figure).
• Quelques notions sur les mesures (longueurs et aires : périmètre et aire du carré et du rectangle, longueur du cercle).

b) Quatre mots-clés.

• Reproduire (des figures, y compris la réalisation pratique de solides).
• Décrire (des figures, pour les identifier ou les représenter)
• Représenter (notamment des solides, avec les problèmes de faces visibles ou invisibles, les patrons)
• Construire (des figures, avec des matériaux et des outils multiples : règle, équerre, gabarit, calque, compas, etc.)

2. Le collège.

a) La sixième.

• Reproduction de figures simples (dans la lignée de ce qui se fait à l'école).
• Mesures (là encore, reprise de ce qui se fait à l'école).
• Parallélipipède rectangle (représentation, patron, volume).
• Symétrie axiale dans le plan (construction d'images, conservation de propriétés, axes de symétrie d'une figure).
• Abscisse d'un point sur une droite. Coordonnées (entiers relatifs) de points du plan.

b) La cinquième.

• Prismes droits, cylindres de révolution (représentation, patron).
• Symétrie centrale dans le plan, parallélogramme, caractérisation angulaire du parallélisme.
• Triangle (somme des angles, inégalité triangulaire, construction de triangles, cercle circonscrit).
• Aires du triangle, du parallélogramme, du disque.
• Repérage sur une droite graduée et dans le plan muni d'un repère orthogonal.

c) La quatrième.

• Pyramide et cône de révolution.
• Translation (à partir du parallélogramme).
• Triangle (droite des milieux et théorème de Thalès dans le triangle, droites remarquables).
• Triangle rectangle et cercle (Pythagore et sa réciproque, tangente à un cercle, cosinus d'un angle aigu).

d) La troisième.

• Sphère, sections planes d'une sphère, d'un cube. Sections d'un cône et d'une pyramide (par des plans parallèles à la base).
• Relations trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente).
• Théorème de Thalès et sa réciproque.
• Vecteurs (écriture, égalité, somme, à partir du parallélogramme). Lien avec la translation. Coordonnées d'un vecteur. Distance de deux points exprimée à partir des coordonnées. Composée de deux symétries centrales.
• Rotations, polygones réguliers (triangle, carré, hexagone). Angle inscrit et angle au centre.

e) Commentaires.

En ce qui concerne la cohérence mathématique des programmes, ils reposent sur un système d'axiomes (implicite) pas très éloigné de celui d'Euclide, mais dans lequel les cas d'égalité des triangles sont absents ([1]), remplacés par l'usage des symétries axiales. Pour une formalisation de ce système on pourra consulter [CF]. Par rapport à la lecture que nous faisons de la géométrie, outre le problème des cas d'égalité qui prive les élèves d'un outil performant de démonstration, on peut

([1]) Ils sont sous-jacents en cinquième dans le paragraphe : construction de triangles.

regretter la minoration du rôle des invariants, aires et surtout angles (en particulier la mesure des angles, sujet que, depuis Dieudonné, les enseignants ne manipulent plus qu'avec des pincettes).

Si l'on compare au programme d'avant les mathématiques modernes, les différences essentielles sont les suivantes :
• Le changement de point de vue : cas d'égalité, *versus* transformations (dans les anciens programmes, seule la symétrie axiale apparaît).
• La minoration du rôle des angles et de leur mesure dans l'actuel programme.
• Les mesures algébriques ont disparu.
• Les compétences sur les cercles sont plus réduites (positions relatives, cercles tangents, etc).
• Les triangles semblables ont disparu.
• En géométrie dans l'espace, le programme de 1966 (en troisième) est centré sur les notions de droites et de plans (comme notre actuel programme de seconde) plus que sur celles de solides (étudiés seulement en sixième autrefois).

Bien entendu, il faut tenir compte du fait que, par rapport à cette époque, le rôle social du collège, avec la massification de l'enseignement, est totalement différent.

3. Le lycée.

Nous analysons sommairement les programmes de seconde et ceux de première et terminale scientifiques. Le cas des autres filières nécessite une réflexion approfondie sur la finalité d'un enseignement de la géométrie dans ces sections.

a) La seconde.

• Retour sur les vecteurs dans le plan (égalité, addition, norme), multiplication par un scalaire. Homothétie et lien avec Thalès.
• Bases et repères. Équation cartésienne d'une droite.
• Orthogonalité des vecteurs, angles orientés de vecteurs, mesure, cosinus, sinus, tangente.
• Retour sur les transformations vues au collège (réflexion, translation, rotation). Axes de symétrie d'un cercle, d'une bande, d'un angle. Applications.
• Géométrie dans l'espace : droites et plans, propriétés d'incidence et d'orthogonalité. Projection orthogonale.
En travaux pratiques apparaissent quelques autres thèmes (recherche des isométries conservant une figure, étude de configurations planes, etc.)

b) La première S.

• Barycentre de deux points pondérés.
• Produit scalaire dans le plan, lien avec la projection orthogonale.
• Extension des vecteurs à l'espace.
• Angles orientés dans le plan, rotations.
• Transformations (composition).
En travaux pratiques, des exemples d'étude de configurations du plan et de l'espace, (notamment sections planes) et des recherches de lieux géométriques (lignes de niveau de $MA^2 + MB^2$, $MA^2 - MB^2$, $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$).

c) La terminale S, programme obligatoire.

• Barycentres de n points (plan et espace).
• Calcul vectoriel (plan et espace), avec le produit vectoriel.
• Représentation paramétrique d'une droite et équation cartésienne d'un plan dans l'espace.
En travaux pratiques apparaissent les courbes paramétrées, dont l'ellipse (les coniques ne sont plus au programme en tant que telles, en particulier leur description géométrique par foyer et directrice n'est plus au programme).

d) La terminale S, enseignement de spécialité.

• Étude détaillée des isométries du plan et des homothéties (composition, utilisation pour étudier des configurations, isométries laissant une partie invariante, utilisation des nombres complexes).
On notera l'absence totale des transformations de l'espace (rotations, etc.)

e) Le nouveau programme de seconde.

Signalons simplement le retour des triangles isométriques et des triangles semblables (appelés "de même forme"), ainsi que la suggestion d'un certain nombre de thèmes parfois très ambitieux.

Annexe 3

Géométrie : l'apport du mouvement

Dans la conception moderne des mathématiques, la notion de fonction ne fait plus référence à la signification de la variable. Bien entendu, il s'agit là d'un gain dans la généralité puisqu'on peut traiter de la même façon des problèmes dont la signification est totalement différente. Cependant, la variable "temps", avec les conceptions dynamiques qu'elle permet, pourrait sans doute jouer un rôle pédagogique plus important dans l'approche d'un certain nombre de notions d'analyse ou de géométrie.

Dans notre société où les moyens de transport sont très développés, l'intuition du mouvement est largement partagée par tous. Par exemple, dès qu'on voyage aux places arrière d'une voiture, on a une perception très claire de la direction du vecteur accélération. On peut donc s'appuyer sur cette familiarité, en cinématique, pour construire les notions de vitesse et d'accélération. En échange, ces notions mènent à une conception plus intuitive de la notion de dérivée.

Indépendamment de ce domaine qui relève directement du mouvement, une exploration dynamique d'un objet statique peut aussi aider à sa compréhension. Ainsi, même pour un peintre, une courbe plane, objet a priori statique, peut être ressentie comme la trace d'un mouvement, cf. [Kan] : *La ligne géométrique est un être invisible, elle est la trace du point en mouvement, donc son produit.*

En analyse, le fait de regarder les courbes comme pouvant être la trace d'un mouvement est une manière naturelle de renforcer le lien avec géométrie.
Cela permet, par exemple, de faire comprendre un graphe de fonction comme un tracé particulier, qui "ne revient pas en arrière".
Cela permet aussi de donner une notion intuitive de continuité et d'explorer son lien avec la dérivabilité. Le mouvement du tracé sert de support à l'intuition (communément admise jusqu'au 19ème siècle) que "toutes les courbes sont (essentiellement) lisses" (c'est-à-dire possèdent assez de dérivées), les angles et les sauts, qui nécessitent un tracé délibéré, ne pouvant être qu'exceptionnels. Bien entendu, on sait maintenant qu'il existe des fonctions continues nulle part dérivables, mais, au niveau de l'enseignement secondaire, il n'y a aucun inconvénient à s'appuyer sur l'intuition contraire.([1]) Cette intuition et les phénomènes géométriques qui l'accompagnent (nous pensons notamment au théorème des valeurs intermédiaires) constituent sans doute un point de passage obligé avant tout apprentissage formel de la notion de continuité.
Dans cette optique d'interprétation de tracés, un type d'exercice nous semble au moins aussi important et formateur que l'exercice standard de tracé d'un objet

([1]) Evidemment, l'enseignant, lui, doit maîtriser les notions mathématiques sous-jacentes.

défini par une formule, c'est la description par une ou des formules d'un objet donné graphiquement. En effet, cet exercice instaure un va-et-vient entre figure et description analytique qui est au centre d'un enseignement "géométrique" de l'analyse.

En géométrie aussi, la notion de mouvement est très utile.

D'abord, la notion même de solide peut s'exprimer en termes de mouvement : un solide est un objet qui peut être déplacé sans changer les distances séparant ses points.
Ensuite, pour visualiser un changement de repère ou une transformation du plan ou de l'espace, on fait référence à un mouvement implicite, plutôt qu'à un changement abstrait de coordonnées. C'est vrai déjà en géométrie plane élémentaire où "l'égalité" (directe) de figures correspond à un déplacement. On peut aussi comprendre de manière dynamique la symétrie plane par rapport à une droite (qui est un antidéplacement) à partir de la rotation dans l'espace du plan de la figure. Cette vision, à côté de l'image usuelle par pliage ou miroir, permet de mieux saisir les difficultés liées à l'orientation du plan. Ce n'est que bien plus tard que la notion d'isotopie formalisera cette démarche dynamique.

La notion de surface est elle aussi justiciable d'une génération dynamique à partir du mouvement d'une courbe. Faire diminuer ou augmenter la dimension par section ou balayage est une démarche naturelle pour les géomètres et l'analyse des changements de formes qui peuvent être ainsi mis en évidence est d'ailleurs la base de la théorie de Morse. À un niveau plus élémentaire, les élèves de collège peuvent observer non seulement une section d'un solide mais une suite de sections par des plans parallèles.

Ces quelques exemples montrent qu'un point de vue dynamique (avec une référence explicite ou non au temps) permet souvent de mieux comprendre les relations qui existent entre deux figures ainsi que des notions dont la définition formelle est statique.

[Kan] V. Kandinsky. Punkt und Linie zu Fläche (1926). Traduction française : Point et ligne sur plan. Denoël (1970).